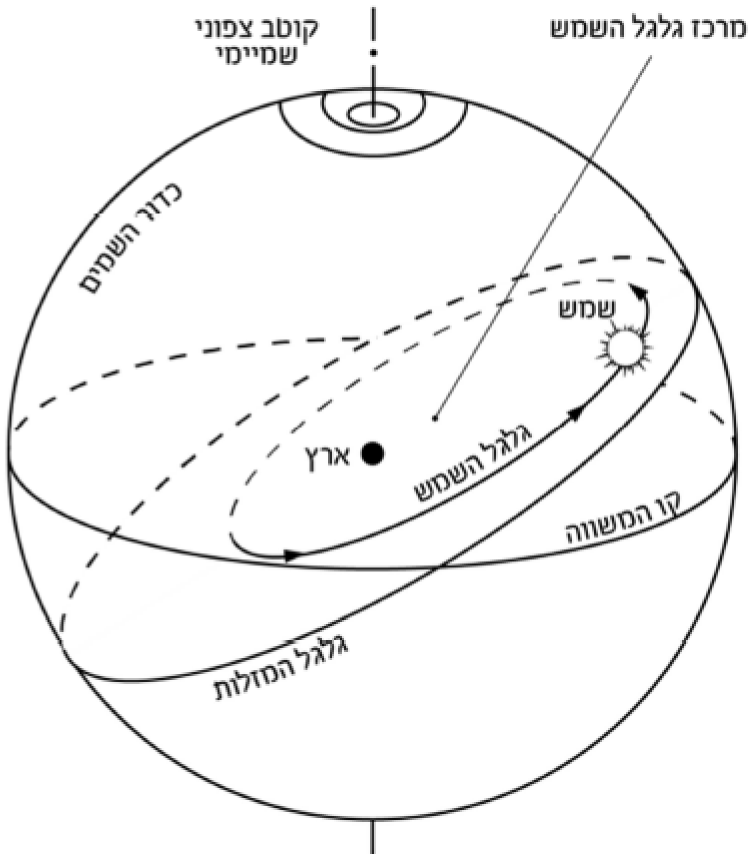
פרק יב – מהלך השמש



כפי שנתבאר במבוא, לשמש יש תנועה שנתית במישור של גלגל המזלות, אבל אין השמש עוברת במקום המזלות עצמן, אלא בגלגל פנימי יותר, שמרכזו אינו כדור הארץ, אלא מרוחק ממנו מעט. **(ראה ציור)** גלגל זה נקרא "גלגל השמש"[1].

המרחק שעוברת השמש בגלגל זה נקרא "מהלך השמש האמצעי".

כמה מעלות הוא מהלך השמש האמצעי ביום אחד?

מהלך השמש ביום אחד

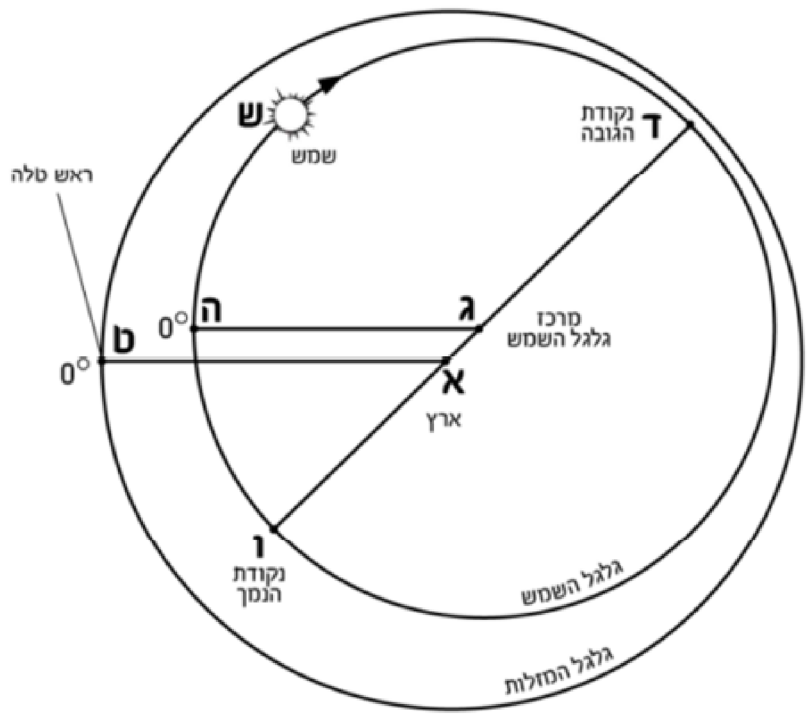
ברמב"ם נזכר שמהלך השמש ביום אחד הוא ”59’8. אם נדקדק במהלך 100 יום או 1000 יום נראה שהמהלך המדוייק הוא ”59’8.33.

כיצד ?

לשון הרמב"ם "**ונמצא מהלכה במאה יום שמנה ותשעים מעלות ושלשה ושלשים חלקים ושלש וחמשים שניות, סימנם צ"ח ל"ג נ"ג**."

נתרגם לשבר עשרוני 98.5647222 ובחלוקה ל-100 0.9856472 באסטרונומיה מודרנית זה קרוב מאוד 0.9856473

נקודת הגובה



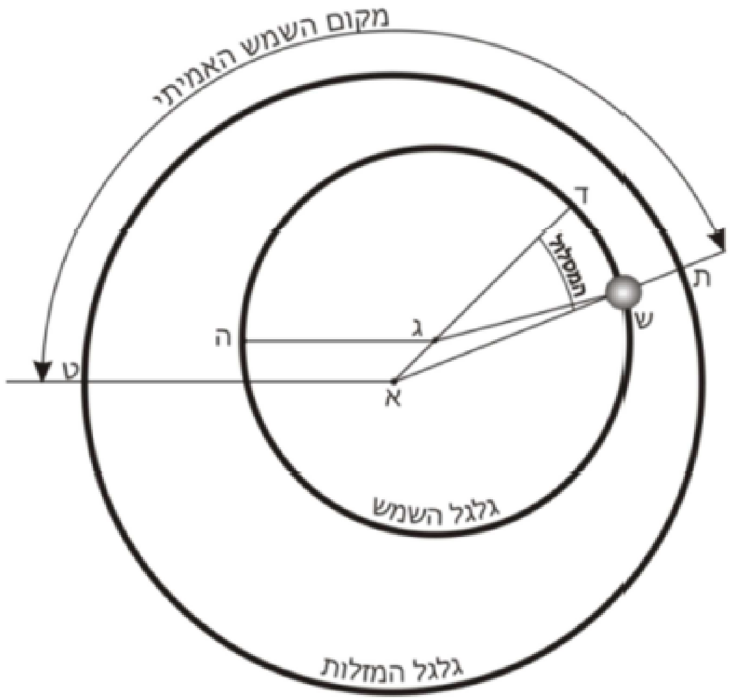
נמשוך קו ממרכז כדור הארץ (נקודה **א'**) אל מרכז גלגל השמש (נקודה **ג'**) ונמשיך אותו עד שיחתוך את גלגל השמש בנקודה **ד'**, וזו היא נקודת "גובה השמש". מקום נקודה זו אינו קבוע, אלא נע באיטיות רבה בקצב קבוע של "0.15 ביום, דהיינו 0.0000416°[7] ביום ימינה (עם כיוון המזלות).

ע"ג גלגל השמש ישנה נקודה שמוגדרת כנקודת ה-0°. מהו מקום אותה נקודה?

נמשוך קו ישר ממרכז גלגל השמש (**ג'**) שמקביל לקו ארץ (**א'**) ראש טלה (**ט'**), והוא יחתוך את גלגל השמש בנקודה ה'. נקודה זו היא נקודת ה-0° של גלגל השמש.

המרחק של נקודת גובה השמש (**ד'**) מנקודת ה-0° נקרא "מקום גובה השמש" (**ד"ה**).

מסלול השמש

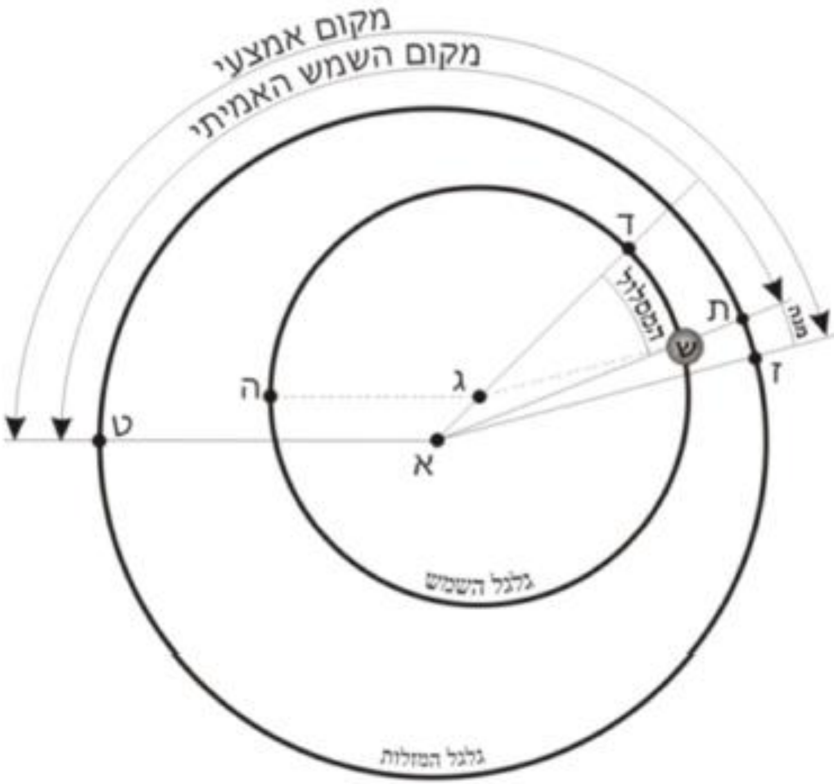


לצורך חשבון הראיה אנו צריכים לדעת את מרחק השמש מראש טלה של גלגל המזלות. מרחק זה נקרא "מקום השמש האמיתי"[1]. כדי להגדירו, נמשיך את הקו המחבר את הארץ **(א')** עם השמש **(ש')** עד שיחתוך את גלגל המזלות בנקודה **ת'.** קשת **ת"ט** היא מקום השמש האמיתי. כדי לחשב את מקום השמש האמיתי, צריך להקדים ג' חשבונות.

א. חישוב מקום השמש האמצעי, כפי שנתבאר לעיל פ"ב.

ב. חישוב המרחק בין מקום השמש האמצעי **(ש')** למקום גובה השמש **(ד').** קשת **דה"ש**. מרחק זה נקרא "מסלול השמש"[2]. כיצד נחשב מרחק זה? נחסר את מקום גובה השמש מקום השמש האמצעי, ומה שנקבל הוא מסלול השמש. (גובה השמש) - (אמצע השמש) = (מסלול השמש).

מנת מסלול השמש



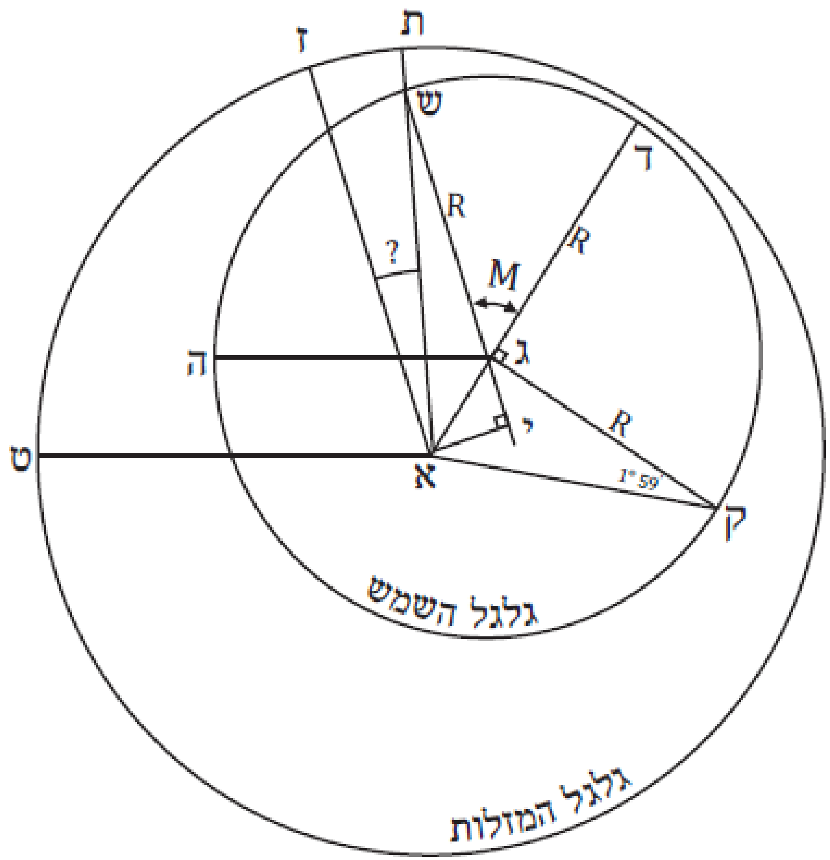
ג. חישוב ההפרש בין המקום האמצעי למקום האמיתי. גודל הפרש זה תלוי במסלול השמש ולכן הוא נקרא "מנת מסלול השמש". כדי לראותו בציור, נעתיק את זוית מקום השמש האמצעי **שג"ה** אל מרכז גלגל המזלות (**א'**), ונקבל את זוית **זא"ט** ששווה לה. מכיוון שזוית **תא"ט** היא מקום השמש האמיתי, זוית **זא"ת** היא ההפרש ביניהם והיא מנת מסלול השמש.

מנת המסלול ברמב"ם

ג ודע שאם יהיה המסלול מאה ושמונים בשוה או שלש מאות וששים בשוה. אין לו מנה אלא יהיה המקום האמצעי הוא המקום האמיתי: **ד** וכמה היא מנת המסלול. אם יהיה המסלול עשר מעלות. תהיה מנתו עשרים חלקים. ואם יהיה עשרים מעלות תהיה מנתו ארבעים חלקים. ואם יהיה שלשים מעלות תהיה מנתו שמונה וחמשים חלקים. ואם יהיה ארבעים מעלות תהיה מנתו מעלה אחת וחמשה עשר חלקים. ואם יהיה חמשים מעלות תהיה מנתו מעלה אחת ותשעה ועשרים חלקים. ואם יהיה ששים מעלות תהיה מנתו מעלה אחת ואחד וארבעים חלקים. ואם יהיה שבעים מעלות תהיה מנתו מעלה אחת ואחד וחמשים חלקים. ואם יהיה שמונים מעלות תהיה מנתו מעלה אחת ושבעה וחמשים חלקים. ואם יהיה תשעים מעלות תהיה מנתו מעלה אחת ותשעה וחמשים חלקים.

נוסחת הטבלה היא: $m = \mathrm{ArcTan}\frac{\mathrm{Sin(Maslul)}}{\mathrm{Cos(Maslul)}+28.877}$ (מנת המסלול)

הוכחת הנוסחה



נתון: **א.** רדיוס גלגל השמש ג"ש = ג"ד = ג"ק.
יסומן להלן באות R.
ב. מסלול השמש זווית דג"ש
יסומן להלן באות M.

צ"ל: מנת מסלול השמש זווית תא"ז.

פתרון: א"ז || ג"ש (ראה בביאור רפי"ג)
ולכן ∢גש"א = ∢תא"ז (מתחלפות).

נתבונן במשולש גק"א. ∢ג' =90°, ז"א שמסלול השמש הוא 90°. ומפורש ברמב"ם פי"ג ה"ג שמנתו היא 1°59', ולכן ∢ק' =1°59' ∢קג"א =90° ולכן

$$tan\,(1^\circ\,59') = \frac{\text{א"ג}}{\mathrm{R}}$$

ולכן $\text{א"ג} = \mathrm{R} \cdot tan\,1^\circ 59'$

נתבונן במשולש גא"ש. נמשיך את קו ג"ש, ונוריד אנך מנקודה א' שיחתוך אותו בנקודה י'. נתבונן במשולש הקטן אג"י.

המשך ההוכחה

∢אג״י =M (קודקודיות).

∢י״ =90° (בניה). ולכן: $\cos M = \text{ג"י}/\text{א"ג} \Leftarrow \text{ג"י} = \text{א"ג}\cos M$

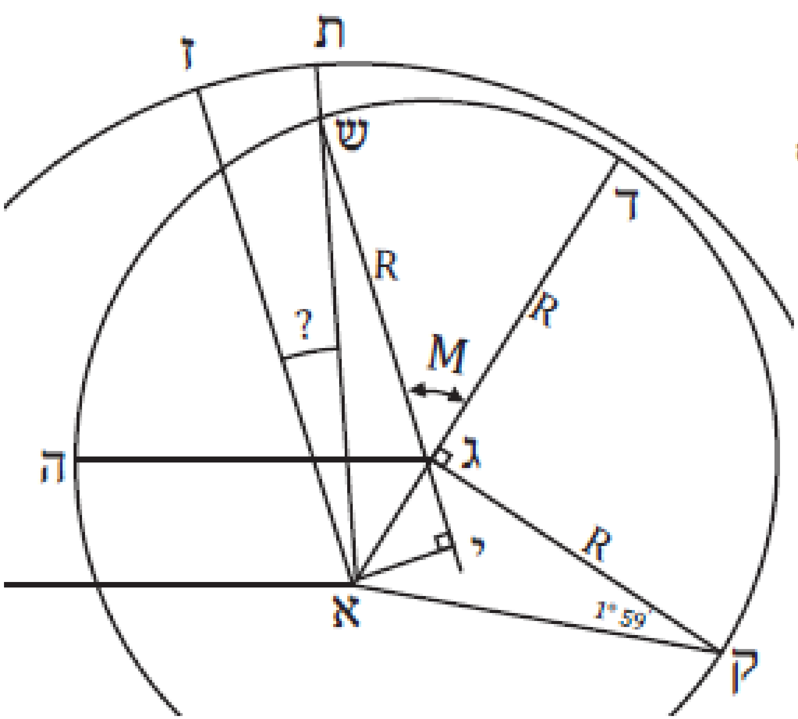
$\sin M = \text{א"י}/\text{א"ג} \Leftarrow \text{א"י} = \text{א"ג}\sin M$

נתבונן במשולש אי״ש. ש״י = ש״ג + ג״י, ∢י״ =90°, א״י =sinM א״ג ולכן

$$\tan\sphericalangle\text{ש}' = \frac{\text{א"י}}{\text{ש"י}} = \frac{\text{א"ג}\sin M}{\text{ש"ג} + \text{א"ג}\cos M} = \frac{R\tan 1°59'\sin M}{R\tan 1°59'\cos M + R} = \frac{\tan 1°59'\sin M}{\tan 1°59'\cos M + 1} = \frac{\sin M}{\cos M + 1/\tan 1°59'}$$

כנ״ל ∢גש״א = ∢תא״ז ולכן

$$\text{מנת המסלול} = \text{תא"ז} = \tan^{-1}\frac{\sin(\text{מסלול השמש})}{28.877 + \cos(\text{מסלול השמש})}$$

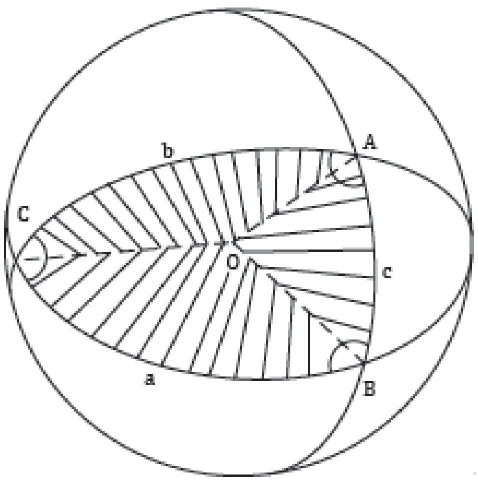


נוסחה זו מתאימה לרשימות הרמב"ם בדיוק, ועפ"ז יתיישבו המקומות שנשאר החזו"א בצ"ע על הרמב"ם.

לדוגמא: מנת המסלול 50°

$$tan^{-1}\frac{\sin 50°}{28.877 + cos\ 50°} = 1.4864 \approx 1°29'$$

המשולש הכדורי



ידיעת חוקי המשולש הכדורי מוכרחת להבנת חשבונות הרמב"ם בפרקים טז-יז.

המשולש הכדורי נוצר ע"י שלושה מישורים שונים, אשר כל אחד מהם עובר דרך מרכז הכדור, וחוצה אותו לשניים. שלושת המישורים יוצרים על מעטפת הכדור המורכב משולש קשתות אשר מרכזן הוא מרכז הכדור, בציור נקודה o. את אורך הקשתות נציין באותיות קטנות a, b, c. את הזוויות שבין הקשתות, שהן גם הזוויות שבין מישורי הקשתות, נציין באותיות הגדולות A,B,C.

במשולש זה קיימות התכונות הנ"ל:

א. היחס בין סינוס כל אחת מן הקשתות לבין סינוס הזווית שמולה קבוע.

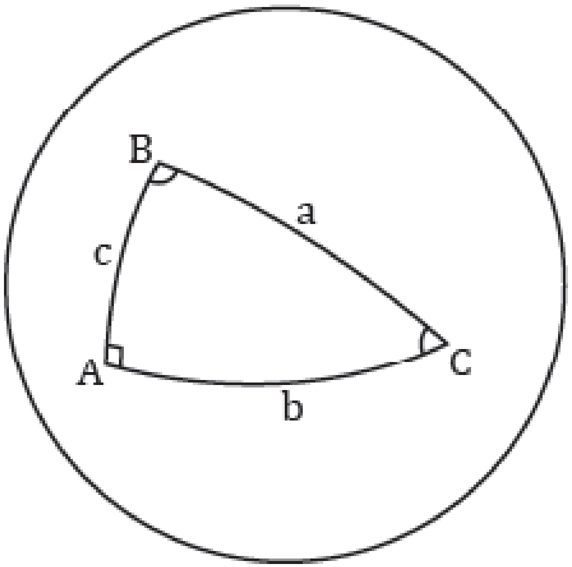
$$\frac{sin\ A}{sin\ a} = \frac{sin\ B}{sin\ b} = \frac{sin\ C}{sin\ c}$$

משפט זה נקרא משפט הסינוסים במשולש כדורי.

ב. כאשר אחת הזוויות שווה 90°, לדוגמא כאשר A = 90° נקבל כלל זה:

$$\frac{sin\ 90^\circ}{sin\ a} = \frac{sin\ B}{sin\ b} \Rightarrow \sin b = sin\ a\ \ sin\ B$$

משפט הקוסינוסים במשולש כדורי



ג. $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$

$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B$

$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$

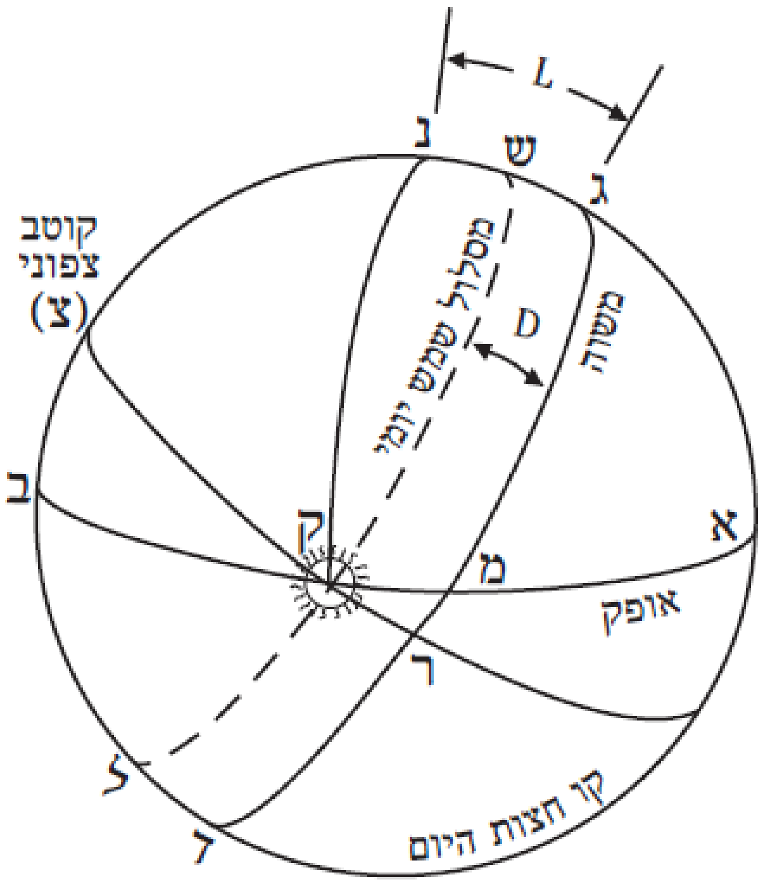
משפט זה נקרא משפט הקוסינוסים הראשון במשולש כדורי.

ד. כאשר אחת הזוויות שווה $90°$, לדוגמא כאשר $A= 90°$ נקבל

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos 90 = \cos b \ \cos c$$

משפט זה נקרא משפט הקוסינוס במשולש כדורי ישר זווית.

חישוב אורך חצי היום



חישוב אורך חצי היום

נתון: **א.** מרחק השמש מקו המשווה קשת ג״ש (ראה בפרק הקודם) יסומן להלן באות D.

ב. מרחק נקודת ״נוכח הראש״ מקו המשווה, קשת ג״נ שהוא מעלת הרוחב (בא״י 32°) יסומן להלן באות L.

ג. מרחק השמש מנקודת ״נוכח הראש״ בשעת השקיעה קשת נ״ק (תיאורטי 90°, אבל מפני רוחב חצי קוטר השמש ותופעת ה״שבירה״ יש להוסיף עוד 0.833°).

צ״ל: אורך חצי היום בשעות.

פתרון: נחשב תחילה את קשת ש״ק. נתבונן במשולש שצ״ק. קשת ש״ק היא המסלול היומי של השמש ולכן היא מקבילה לקו המשווה. נקודה צ׳ היא הקוטב הצפוני. ולכן זווית צ׳ שווה לקשת ש״ק, וקשת צ״ש שווה לקשת צ״ק. וקשת ג״ש = ק״ר = D.

נתבונן במשולש נק״צ. שלושת צלעותיו ידועות:

צ״ר =°90 (מרחק הקוטב קו המשווה), ולפ״ז $\text{צ"ק} = 90 - D$

צ״ג =°90 (כנ״ל) ולפ״ז $\text{צ"נ} = 90 - L$

נ״ק, נתון °90.833

ע״פ משפט הקוסינוסים הראשון במשולשים כדוריים

$$\cos \text{נ"ק} = \cos \text{צ"נ} \cos \text{צ"ק} + \sin \text{צ"נ} \sin \text{צ"ק} \cos \text{צ'}$$

ולכן

$$\cos \text{צ'} = \frac{\cos \text{נ"ק} - \cos \text{צ"נ} \cos \text{צ"ק}}{\sin \text{צ"נ} \sin \text{צ"ק}} = \frac{\cos \text{נ"ק} - \cos (90 - L) \cos (90 - D)}{\sin (90 - L) \sin (90 - D)}$$

$$= \frac{\cos \text{נ"ק} - \sin L \sin D}{\cos L \cos D} = \frac{\cos 90.833}{\cos L \cos D} - \tan L \tan D$$

ולכן $\text{צ'} = \cos^{-1}(\cos 90.833° / \cos L \cos D - \tan L \tan D)$