פרק 10

<u>הגדרה.</u> סידרה סופית $G=G_0\geq G_1\geq\cdots\geq G_n=\{1\}$ נקראת *סידרה נורמלית* עבור החבורה G אם $G_i\trianglelefteq G_{i-1}$ לכל $1\leq i\leq n$. המספר n הוא *האורך* של הסידרה. החבורות G_{i-1}/G_i הן *הגורמים* של הסידרה.

<u>דוגמה.</u> הסידרה $S_4\geq D_4\geq <(1,2,3,4)>\geq\{1\}$ היא סידרה נורמלית מאורך 3 עבור S_3. הגורמים של הסידרה הם :

$S_4/D_4=\mathbb{Z}(3),\ D_4/<(1,2,3,4)>=\mathbb{Z}(2),\ <(1,2,3,4)>/\{1\}=\mathbb{Z}(4)$.

<u>תרגיל.</u> תהי G חבורה סופית ותהי $G=G_0\geq G_1\geq\cdots\geq G_n=\{1\}$ סידרה נורמלית עבור G. הוכח כי $|G|=\prod_{i=1}^{n}|G_{i-1}/G_i|$.

<u>תרגיל.</u> יהי F שדה. הוכח כי הסידרה $Gl(n,F)\geq Sl(n,F)\geq\{I,-I\}\geq\{I\}$ היא סידרה נורמלית.

<u>תרגיל.</u> יהי F שדה מסדר p ראשוני. הוכח כי $2(p-1)\,\big|\,|Gl(n,F)|$.

<u>הגדרה.</u> סידרה נורמלית $G\geq H_1\geq\cdots\geq H_m$ (A) היא *עידון* של הסידרה הנורמלית $G=G_0\geq G_1\geq\cdots\geq G_n=\{1\}$ (B) אם כל חבורה ב- (B) מופיעה ב- (A).

<u>הגדרה.</u> סידרה $G=G_0\geq G_1\geq\cdots\geq G_n=\{1\}$ (A) היא *סידרת הרכב* עבור G אם אין לה עידון פרט מלהוסיף חזרות של החבורות G_i שכבר מופיעות ב- (A).

<u>דוגמה.</u> תהי $\mathbb{Z}(12)=<a>$. הסידרה $<a>\geq<a^3>\geq<a^6>\geq\{1\}$ (A) היא עידון של הסידרה $<a>\geq<a^6>\geq\{1\}$ (B). הסידרה (A) היא סידרת הרכב עבור $<a>$. הגורמים של סידרה (A) הם החבורות $\mathbb{Z}(3),\mathbb{Z}(2),\mathbb{Z}(2)$. חבורות אלו הן פשוטות.

<u>הערה 10.1.</u> סידרה נורמלית $G=G_0\geq G_1\geq\cdots\geq G_n=\{1\}$ (A) היא סידרת הרכב אם ורק אם כל גורם G_{i-1}/G_i הוא חבורה פשוטה.

<u>הוכחה.</u> הסידרה (A) היא סידרת הרכב אם ורק אם לכל $1\leq i\leq n$ אין לחבורה G_{i-1} ח"ח ממש נורמלית המכילה את G_i ממש. לפי משפט 7.17 זה קורה אם ורק אם G_{i-1}/G_i היא חבורה פשוטה לכל $1\leq i\leq n$.

<u>הגדרה.</u> שתי סדרות נורמליות עבור G הן *איזומורפיות* אם כל הגורמים של אחד מן הסדרות איזומורפים לכל הגורמים של הסידרה השניה בסדר כלשהו.

דוגמה. תהי $\mathbb{Z}(12)=<a>$. גורמי סידרה $<a>\geq<a^3>\geq<a^6>\geq\{1\}$ (A) הם $\mathbb{Z}(3),\mathbb{Z}(2),\mathbb{Z}(2)$. גורמי הסידרה $<a>\geq<a^2>\geq<a^4>\geq\{1\}$ (B) הם $\mathbb{Z}(2),\mathbb{Z}(2),\mathbb{Z}(3)$. כל גורמי סידרה (A) איזומורפים לכל גורמי סידרה (B) ולכן $(A)\simeq(B)$.

משפט 10.2. **(משפט העידון של שרייר)** לכל שתי סדרות נורמליות עבור חבורה G ישנם עידונים איזומורפים.

הוכחה. יהיו $G\geq G_1\geq\cdots\geq G_n=\{1\}$ (A) ו- $G\geq H_1\geq\cdots\geq H_m=\{1\}$ (B) סדרות נורמליות עבור G. אם $n=1$ אזי סידרה (B) היא עידון של סידרה (A) ואם $m=1$ אזי סידרה (A) היא עידון של סידרה (B). בשני המקרים, ברור כי יש לסדרות עידונים איזומורפים. יהי $m=2$ ונוכיח כי יש ל- (A) ול- (B) עידונים איזומורפים באינדוקציה על n. אורך הסידרה $G_1\geq(G_1\bigcap H_1)\geq\{1\}$ הוא 2, ואורך הסידרה החלקית $G_1\geq\cdots\geq G_n=\{1\}$ של (A) הוא $n-1$. מהנחת האינדוקציה יש לסדרות האלו עידונים איזומורפים:

$$G_1\geq\cdots\geq G_2\geq\cdots\geq\{1\}\ \simeq\ G_1\geq\cdots\geq(G_1\bigcap H_1)\geq\cdots\geq\{1\}\qquad(1).$$

ממשפט האיזומורפיזם השני $G_1/(G_1\bigcap H_1)\simeq(G_1H_1)/H_1$ ו- $H_1/(G_1\bigcap H_1)\simeq(G_1H_1)/G_1$. לכן

$$(G_1H_1)\geq G_1\geq(G_1\bigcap H_1)\geq\{1\}\ \simeq\ (G_1H_1)\geq H_1\geq(G_1\bigcap H_1)\geq\{1\}\qquad(2).$$

הסידרה החלקית $(G_1\bigcap H_1)\geq\cdots\geq\{1\}$ של אגף ימין של (1) נותן עידון עבור אגף שמאל של (2) ועידון זה איזומורפי לעידון אגף שמאל של (2). זה נותן:

$$(G_1H_1)\geq G_1\geq\cdots\geq(G_1\bigcap H_1)\geq\cdots\geq\{1\}\simeq(G_1H_1)\geq H_1\geq\cdots\geq(G_1\bigcap H_1)\geq\cdots\geq\{1\}\quad(3)$$

ומאיזומורפיזם (3) מקבלים:

$$G\geq(G_1H_1)\geq\cdots\geq G_2\geq\cdots\geq\{1\}\ \simeq\ G\geq G_1H_1\geq\cdots\geq H_1\geq(G_1\bigcap H_1)\geq\cdots\geq\{1\}\quad(4)$$

אגף שמאל של (4) הוא עידון של (A) ואגף ימין של (4) הוא עידון של (B). לכן המשפט הוכח עבור $m=2$. יהי $m>2$ ונניח כי המשפט נכון עבור שתי סדרות כאשר האורך של אחת מהן הוא פחות מ- m. מנכונות המשפט עבור $m=2$ נובע כי יש לסידרה (A) ולסידרה $G\geq H_1\geq\{1\}$ עידונים איזומורפים:

$$(5)\quad G\geq\cdots\geq G_1\geq\cdots\geq G_2\geq\cdots\geq\{1\}\ \simeq\ G\geq\cdots\geq H_1\geq\cdots\geq\{1\}$$

מהנחת האינדוקציה על m נובע כי לסידרה החלקית $H_1\geq\cdots\geq\{1\}$ של אגף ימין של (5) ולסידרה החלקית $H_1\geq H_2\geq\cdots\geq H_m=\{1\}$ של (B) יש עידונים איזומורפים

$$(6)\quad H_1\geq\cdots\geq\{1\}\ \simeq\ H_1\geq\cdots\geq H_2\geq\cdots\geq\{1\}$$

הצבת אגף שמאל של (6) במקום הסידרה החלקית $H_1\geq\cdots\geq\{1\}$ של אגף ימין של (5) מעדנת את אגף ימין של (5). נוסיף G לתחילת אגף ימין של (6) ונקבל סידרה נורמלית $G\geq H_1\geq\cdots\geq H_2\geq\cdots\geq\{1\}$ (C). הסידרה (C) היא עידון של (B) והיא איזומורפית לעידון של אגף ימין של (5). העידון של אגף ימין של (5) איזומורפי לעידון של אגף שמאל של (5). אבל העידון של אגף שמאל של (5) הוא עידון של (A). קיבלנו שיש לסדרות (A) ו- (B) עידונים איזומורפים והמשפט הוכח.

תוצאה מידית של משפט 10.2 היא

<u>תוצאה 10.3. (משפט זורדן-הולדר).</u> שתי סדרות הרכב עבור חבורה G הן איזומורפיות.

<u>דוגמה.</u> שתי הסדרות בדוגמה שקדמה למשפט 10.2 הן סדרות הרכב עבור $\mathbb{Z}(12)$ והן איזומורפיות.

<u>הגדרה.</u> חבורה G היא *פתירה* אם יש לה סידרה נורמלית אשר כל גורמיה הם חבורות קומוטטיבית.

ברור כי חבורה קומוטטיבית G היא פתירה, כי הסידרה $G \geq \{1\}$ היא נורמלית והגורם היחיד של הסידרה, $G/\{1\}$, הוא חבורה קומוטטיבית.

<u>דוגמה.</u> הסידרה $S_3 \geq A_3 \geq \{1\}$ היא נורמלית והגורמים שלה הם $\mathbb{Z}(2), \mathbb{Z}(3)$. לכן S_3 היא חבורה פתירה.

<u>הגדרה.</u> איבר מן הצורה $x^{-1}y^{-1}xy$, כאשר $x, y \in G$, נקרא *קומוטטור* ב- G.

<u>הערה 10.4.</u> תהי $H \trianglelefteq G$. החבורה G/H היא קומוטטיבית אם ורק אם כל קומוטטור ב- G שייך ל- H.
<u>הוכחה.</u> G/H היא קומוטטיבית אם ורק אם $xH \cdot yH = yH \cdot xH$ לכל $x, y \in G$ אם ורק אם $xyH = yxH$ לכל $x, y \in G$ אם ורק אם $x^{-1}y^{-1}xyH = H$ לכל $x, y \in G$ אם ורק אם $x^{-1}y^{-1}xy \in H$ לכל $x, y \in G$.

<u>הערה 10.5.</u> תהי G חבורה עם סידרת הרכב. אזי G היא פתירה אם ורק אם כל הגורמים של סידרת הרכב של G הם חבורות ציקליות מסדר ראשוני.
<u>הוכחה.</u> G היא פתירה אם ורק אם כל הגורמים של סידרת הרכב של G הם חבורות קומוטטיביות. הגורמים של סידרת הרכב הם חבורות פשוטות וחבורה קומוטטיבית היא פשוטה אם ורק אם היא ציקלית מסדר ראשוני.

כל חבורה סופית יש לה סידרת הרכב. לכן

<u>תוצאה 10.6.</u> חבורה סופית היא פתירה אם ורק אם כל הגורמים של סידרת הרכב שלה הם חבורות ציקליות מסדר ראשוני.

<u>דוגמה.</u> חבורה ציקלית אינסופית היא קומוטטיבית ולכן פתירה, אבל אין לה סידרת הרכב.

<u>דוגמא.</u> יהי $n \geq 5$. הסידרה $S_n \geq A_n \geq \{1\}$ היא סידרת הרכב של S_n אבל הגורם $A_n/\{1\} \simeq A_n$ איננו סידרה ציקלית מסדר ראשוני. לכן S_n איננה פתירה לכל $n \geq 5$.

תרגיל. הוכח כי S_4 היא פתירה.

הערה 10.7. תהי G חבורה פתירה ותהי H ח"ח של G. אזי H היא פתירה.
הוכחה. תהי $G \geq G_1 \geq \cdots \geq G_n = \{1\}$ סידרה נורמלית עבור G. לכל $1 \leq i \leq n$ תהי $H_i = G_i \bigcap H$. יהי $h_i \in H_i$ ו- $h_{i-1} \in H_{i-1}$. אזי $h_i \in G_i$ ו- $h_{i-1} \in G_{i-1}$, לכן מן הנתון $G_i \trianglelefteq G_{i-1}$ נובע כי $h_{i-1}^{-1}h_ih_{i-1} \in G_i$. שני האיברים h_i ו- h_{i-1} שייכים ל- H ולכן $h_{i-1}^{-1}h_ih_{i-1} \in H$. קיבלנו כי $h_{i-1}^{-1}h_ih_{i-1} \in G_i \bigcap H = H_i$, ז"א, $H_i \trianglelefteq H_{i-1}$ ו- $H \geq H_1 \geq \cdots \geq H_n \geq \{1\}$ היא סידרה נורמלית עבור H. יהיו $x, y \in H_{i-1}$. אזי $x, y \in G_{i-1}$ ונתון כי G_{i-1}/G_i היא חבורה קומוטטיבית. מהערה 10.4 נובע כי $x^{-1}y^{-1}xy \in G_i$. גם x וגם y הם איברים ב- H ולכן $x^{-1}y^{-1}xy \in H$. קיבלנו כי $x^{-1}y^{-1}xy \in G_i \bigcap H = H_i$ לכל $x, y \in H_{i-1}$. הערה 10.4 גוררת כי H_{i-1}/H_i היא קומוטטיבית לכל $1 \leq i \leq n$, ז"א, H היא פתירה.

משפט 10.8. תהי N ח"ח נורמלית של G. אזי G היא פתירה אם ורק אם שתי החבורות N ו- G/N הן פתירות.
הוכחה. 1) נניח כי G היא פתירה. תהי $G \geq G_1 \geq \cdots \geq G_n = \{1\}$ סידרה נורמלית עבור G שכל גורמיה הם חבורות קומוטטיביות.
<u>טענה.</u> הסידרה $G/N = G_0/N \geq (G_1N)/N \geq \cdots \geq (G_nN)/N = \{N\}$ (A) היא סידרה נורמלית עבור G/N.
<u>הוכחת הטענה.</u> יהי $x_{i-1} \in G_{i-1}N$ ויהי $x_i \in G_iN$. אזי קיימים $g_{i-1} \in G_{i-1}, n_{i-1} \in N$ ו- $g_i \in G_i, n_i \in N$ כך ש- $x_{i-1} = g_{i-1}n_{i-1}$ ו- $x_i = g_in_i$. לכן $x_{i-1}N = g_{i-1}n_{i-1}N = g_{i-1}N$ ו- $x_iN = g_in_iN = g_iN$. מכאן נובע כי $x_{i-1}^{-1}N \cdot x_iN \cdot x_{i-1}N = g_{i-1}^{-1}N \cdot g_iN \cdot g_{i-1}N = g_{i-1}^{-1}g_ig_{i-1}N$ ונתון כי $G_i \trianglelefteq G_{i-1}$. לכן $g_{i-1}^{-1}g_ig_{i-1}N \in G_iN$ וקיבלנו כי $x_{i-1}^{-1}N \cdot x_iN \cdot x_{i-1}N \in (G_iN)/N$ לכל $x_iN \in (G_iN)/N$ ולכל $x_{i-1}N \in (G_{i-1}N)/N$, כלומר, (A) היא סידרה נורמלית.
<u>טענה.</u> כל גורמי הסידרה (A) הם חבורות קומוטטיביות.
<u>הוכחת הטענה.</u> יהי $1 \leq i \leq n$ ויהי $X = x_1^{-1}N \cdot x_2^{-1} \cdot x_1N \cdot x_2N$ קומוטטור ב- $(G_{i-1}N)/N$ כאשר $x_1, x_2 \in G_{i-1}N$. קיימים $g_1, g_2 \in G_{i-1}$ ו- $n_1, n_2 \in N$ כך ש- $x_1 = g_1n_1$ ו- $x_2 = g_2n_2$. נובע מ- $x_iN = g_in_iN = g_iN$ עבור $i = 1,2$ כי $X = g_1^{-1}g_2^{-1}g_1g_2N$. אבל G_{i-1}/G_i היא קומוטטיבית ולכן הקומוטטור $x = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2 \in G_i$ ו- $X \in (G_iN)/N$. קיבלנו כי כל קומוטטור ב- $(G_{i-1}N)/N$ שייך ל- $(G_iN)/N$ ולכן כל גורמי (A) הם קומוטטיבים.
2) נניח כי N ו- G/N הן חבורות פתירות. תהי
$G/N \geq G_1/N \geq \cdots \geq G_n/N = \{N\}$ (A) סידרה נורמלית עבור G/N שכל גורמיה הם חבורות קומוטטיביות. כאשר $N \leq G_i \leq G$ לכל $1 \leq i \leq n$. לכל $x_i \in G_i$ ולכל

$x_{i-1} \in G_{i-1}$ הנורמליות של (A) גוררת כי $x_{i-1}^{-1}N \cdot x_iN \cdot x_{i-1}N = x_{i-1}^{-1}x_ix_{i-1} \in G_i/N$.
נובע מכאן כי $x_{i-1}^{-1}x_ix_{i-1} \in G_i$ או ש- $G_i \trianglelefteq G_{i-1}$ לכל $1 \le i \le n$. ממשפט האיזומורפיזם השלישי $G_{i-1}/G_i \simeq (G_{i-1}/N)/(G_i/N)$ ולכן G_{i-1}/G_i היא קומוטטיבית לכל $1 \le i \le n$. תהי $N \ge N_1 \ge \cdots \ge N_m = \{1\}$ סידרה נורמלית עבור N שכל גורמיה הם חבורות קומוטטיביות. אזי הסידרה $G \ge G_1 \ge \cdots \ge G_n = N \ge N_1 \ge \cdots \ge N_m = \{1\}$ היא סידרה נורמלית וכל גורמיה הם חבורות קומוטטיביות. קיבלנו כי G היא חבורה פתירה.

__תוצאה 10.9.__ תהי G חבורת - p כאשר p הוא מספר ראשוני. אזי G היא פתירה.
__הוכחה.__ אם $|G| = p$ אזי G היא ציקלית ולכן היא פתירה. יהי $|G| > p$ ונניח כי כל חבורת - p מסדר $|G| >$ היא פתירה. אם G היא קומוטטיבית אזי היא פתירה. אם G איננה פתירה אזי משפט 8.11 גורר כי $1 < |Z(G)| < |G|$. מהנחת האינדוקציה, $Z(G)$ ו- $G/Z(G)$ הן חבורות פתירות. לכן G היא פתירה על פי משפט 10.8.

הוכחת התוצאה הבאה לא תינתן כאן.

__משפט 10.10.__ (משפט בורנסייד). יהיו p,q מספרים ראשוניים ויהיו n,m מספרים טבעיים. אם $|G| = p^nq^m$ אזי G היא פתירה.

__תרגיל.__ יהיו $p > q$ מספרים ראשוניים ויהי n מספר טבעי. הוכח כי אם $|G| = p^nq$ אזי G היא פתירה, בלי להיעזר במשפט בורנסייד.

הוכחת המשפט הבאה היא ארוכה ודורשת כלים מתקדמים שלא נלמדו כאן. ההוכחה לא תינתן.

__משפט 10.11.__ (משפט פייט – טומפסון). כל חבורה מסדר אי זוגי היא פתירה.

__הגדרה וסימון.__ החבורה G' הנוצרת על ידי הקומוטטורים של G, ז"א ע"י $\{x^{-1}y^{-1}xy : x, y \in G\}$, נקראת *החבורה החלקית הנגזרת של* G. נסמן $G^0 = G$ ולכל טבעי n נסמן $G^n = (G^{n-1})'$, כלומר, G^n היא החבורה החלקית הנגזרת של G^{n-1}.
הסידרה $G = G^0 \ge G^1 \ge \cdots$ היא *הסידרה הנגזרת של* G.

__תרגיל.__ הוכח כי $G^n \trianglelefteq G^{n-1}$ לכל טבעי n.

__משפט 10.12.__ G היא פתירה אם ורק אם הסידרה הנגזרת של G היא סופית.
__הוכחה.__ 1) נניח כי הסידרה הנגזרת של G היא סופית. אזי לפי התרגיל הקודם היא סידרה נורמלית עבור G. הגורמים של הסידרה הנגזרת הם חבורות קומוטטיביות מהערה 10.4 ולכן G היא פתירה.
2) נניח כי G היא פתירה, ותהי $G = G_0 \ge G_1 \ge \cdots \ge G_n = \{1\}$ סידרה נורמלית עבור G שכל גורמיה הם חבורות קומוטטיביות. ברור כי $G_0' \le G_0$. יהי $1 < i \le n$ ונניח כי

$G^{i-1} \le G_{i-1}$. החבורה G_{i-1}/G_i היא קומוטטיבית ולכן $(G_{i-1})' \le G_i$ מהערה 10.4. לכן $G^i = (G^{i-1})' \le G_i'$. עבור $i = n$ ונקבל כי $\{1\} \le G^n \le G_n = \{1\}$, ז"א, $G_n = \{1\}$ והסידרה הנגזרת היא סופית.