פרק 8

<u>הגדרה וסימן.</u> יהי $a \in G$. *מחלקת הצמידות של* a ב- G היא:
$Cl(a) = \{xax^{-1} \ : \ x \in G\}$.
קל לוודא כי $Cl(a) = \{x^{-1}ax \ : \ x \in G\}$.

<u>הערה 8.1.</u> יהי $(i_1,\ldots,i_k)$ מחזור ב- S_n ויהי $\sigma \in S_n$. אזי
$\sigma(i_1,\ldots,i_n)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1),\ldots,\sigma(i_n))$.
<u>הוכחה.</u> יהיו $ay = (\sigma(i_1),\ldots,\sigma(i_k))$, $as = \sigma(i_1,\ldots,i_k)\sigma^{-1}$ ויהי $1 \le i \le n$. אם $i = \sigma(i_j)$ כאשר $1 \le j \le k$ אזי $ay(i) = (\sigma(i_1),\ldots,\sigma(i_k))(\sigma(i_j)) = \sigma(i_{j+1 \bmod k})$ ו- $as(i) = \sigma(i_1,\ldots,i_k)\sigma^{-1}\sigma(i_j) = \sigma(i_1,\ldots,i_k)(i_j) = \sigma(i_{j+1 \bmod k})$. אם $i \ne \sigma(i_j)$ לכל $1 \le j \le k$ אזי $ay(i) = i$ ו- $\sigma^{-1}(i) \ne i_j$ לכל $1 \le j \le k$. לכן
$as(i) = \sigma(i_1,\ldots,i_k)\sigma^{-1}(i) = \sigma\sigma^{-1}(i) = i$.

עד עכשיו האורך של מחזור ב- S_n היה מספר טבעי בין 2 ל- n. לצורך הדיון הבא נאפשר מחזורים מאורך 1. מחזור מאורך 1 הוא תמורת הזהות.

<u>דוגמה והגדרה.</u> $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 6 & 9 & 7 & 10 & 8 \end{pmatrix}$. פירוקו של σ למכפלה של מחזורים זרים הוא $\sigma = (3)(6)(1,2)(4,5)(7,9,10,8)$. לכן σ היא תמורה *מצורה* $1^2 2^2 3^0 4^1 5^0 6^0 7^0 8^0 9^0 10^0$. ז"א, פירוקו למכפלה של מחזורים זרים מורכב משני מחזורים מאורך 1, שני מחזורים מאורך 2 , אפס מחזורים מאורך 3, מחזור אחד מאורך 4 ואפס מחזורים מאורך 5 עד 10. באופן כללי תמורה ב- S_n היא *מצורה* $1^{m_1} 2^{m_2} \cdots n^{m_n}$ אם פירוקה למכפלה של מחזורים זרים מורכב מ- m_1 מחזורים מאורך 1, m_2 מחזורים מאורך 2, ..., ו- m_n מחזורים מאורך n. כל תמורה צמודה ל- σ היא מן הצורה $\tau\sigma\tau^{-1} = \tau(3)(6)(4,5)(7,9,10,8)\tau^{-1} = \tau(3)\tau^{-1}\tau(6)\tau^{-1}\tau(4,5)\tau^{-1}\tau(7,9,10,8)\tau^{-1}$.
מהערה 8.1 נקבל כי
$\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(3)) \cdot (\tau(6)) \cdot (\tau(1),\tau(2)) \cdot (\tau(4),\tau(5)) \cdot (\tau(7),\tau(9),\tau(10),\tau(8))$. ז"א, הצורה של כל תמורה הצמודה ל- σ היא הצורה של σ. בכיוון הפוך, נבחר איזושהי תמורה ב- S_{10} עם הצורה של σ, לדוגמה $\sigma' = (7)(8)(3,5)(2,9)(1,4,10,6)$. אם נעמיד את σ מעל σ' כדהלן:
$\sigma = (3)(6)(1,2)(4,5)(7,9,10,8)$
$\sigma' = (7)(8)(3,5)(2,9)(1,4,10,6)$
קל לראות שהתמורה $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 7 & 2 & 9 & 8 & 1 & 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}$ המעתיקה כל מספר בפירוקה של σ למספר מתחתיו בפירוקה של σ', אזי $\sigma' = \rho\sigma\rho^{-1}$. נובע מכל זה

כי $Cl(\sigma)=$ קבוצת התמורות ב- S_n שיש להן את הצורה של σ. לא קשה להוכיח כי תופעה זו היא כללית, כלומר:

<u>משפט 8.2.</u> תהי $\sigma\in S_n$. אזי $Cl(\sigma)=$ קבוצת התמורות ב- S_n שיש להן את הצורה של σ.

<u>דוגמה.</u> מחלקת הצמידות של התמורה $\sigma=(1,2)(3,4)$ ב- S_4 היא
$Cl(\sigma)=\{(1,2)(3,4),(1,3)(2,4),(1,4)(2,3)\}$

<u>הערה 8.3</u> יהי $a\in G$. אזי $a\in Cl(a)$.
<u>הוכחה.</u> $a=1\cdot a\cdot 1^{-1}$.

<u>הערה 8.4</u> יהי $a\in G$. אזי $c\in Cl(a)$ אם ורק אם $Cl(c)=Cl(a)$.
<u>הוכחה.</u> 1) נניח כי $c\in Cl(a)$. אזי קיים $x\in G$ כך ש- $c=xax^{-1}$ ולכן $a=x^{-1}cx$. יהי $y\in Cl(a)$. אזי קיים $z\in G$ כך ש- $y=zaz^{-1}$. מכאן נובע כי $y=zx^{-1}cxz^{-1}=(zx^{-1})c(zx^{-1})^{-1}\in Cl(c)$. יהי $u\in Cl(c)$. אזי קיים $w\in G$ כך ש- $u=wcw^{-1}$ ולכן $u=wxax^{-1}w^{-1}=(wx)a(wx)^{-1}\in Cl(a)$.
2) נניח כי $Cl(a)=Cl(c)$. אזי $c\in Cl(c)=Cl(a)$.

<u>תוצאה 8.5.</u> יהיו $a,b\in G$. אזי או $Cl(a)=Cl(b)$ או $Cl(a)\bigcap Cl(b)=\varnothing$.
<u>הוכחה.</u> נניח כי $Cl(a)\bigcap Cl(b)\neq\varnothing$. אזי קיים $c\in Cl(a)\bigcap Cl(b)$. הערה 8.4 גורר כי $Cl(a)=Cl(c)$ וגם $Cl(b)=Cl(c)$. לכן $Cl(a)=Cl(b)$.

<u>הגדרה.</u> קבוצה $\{a_i : i\in I\}\subseteq G$ היא *קבוצת נציגים של כל מחלקות הצמידות של* G אם: 1) לכל $a\in G$ קיים $i\in I$ כך ש- $a\in Cl(a_i)$. 2) לכל $i,j\in I$ אם $i\neq j$ אזי $Cl(a_i)\bigcap Cl(a_j)=\varnothing$.

הערה 8.3 ותוצאה 8.5 גוררות

<u>תוצאה 8.6.</u> קיימת קבוצת נציגים של כל מחלקות הצמידות $\{a_i : i\in I\}\subseteq G$ של G ו- $G=\bigcup_{i\in I}Cl(a_i)$ היא חלוקה של G.

<u>הערה 8.7</u> יהי $a\in G$. אזי $a\in Z(G)$ אם ורק אם $Cl(a)=\{a\}$.
<u>הוכחה.</u> $a\in Z(G)$ אם ורק אם $xa=ax$ לכל $x\in G$ אם ורק אם $xax^{-1}=a$ לכל $x\in G$ אם ורק אם $Cl(a)=\{xax^{-1} : x\in G\}=\{a\}$.

משפט 8.8 . (נוסחת המחלקה 1) תהי G חבורה סופית יהיו $a_1,\ldots,a_n$ נציגים של כל מחלקות הצמידות השונות של G, פרט מאיברי $Z(G)$. אזי $|G|=|Z(G)|+\sum_{i=1}^{n}|Cl(a_i)|$.

הוכחה. נובע מתוצאה 8.6 והערה 8.7 כי $Z(G)\bigcup\{a_1,\ldots,a_n\}$ היא קבוצת נציגים של כל מחלקות הצמידות של G. מכיוון שמחלקות הצמידות מהוות חלוקה של G מקבלים כי $|G|=|Z(G)|+\sum_{i=1}^{n}|Cl(a_i)|$.

הערה 8.9. יהי $a\in G$. אזי $|Cl(a)|=G/N_G(a)$.

הוכחה. נגדיר $f:G/N_G(a)\to Cl(a)$ ע"י $f\left(\bar{x}\right)=xax^{-1}$ לכל $\bar{x}=xN_G(a)\in G/N_G(a)$.

טענה 1. f מגדרת היטב.

הוכחת הטענה. יהיו $\bar{x},\bar{y}\in G/N_G(a)$ כך ש- $\bar{y}=\bar{x}$. אזי קיים $n\in N_G(a)$ כך ש- $y=xn$. לכן

$f\left(\bar{y}\right)=yay^{-1}=xna(xn)^{-1}=x(nan^{-1})x=xax^{-1}=f\left(\bar{x}\right)$.

טענה 2. f היא חח"ע.

הוכחת הטענה. יהיו $\bar{x},\bar{y}\in G/N_G(a)$ כך ש- $f\left(\bar{x}\right)=f\left(\bar{y}\right)$. אזי $xax^{-1}=yay^{-1}$ ולכן $y^{-1}xax^{-1}y=a$ או $(y^{-1}x)a(y^{-1}x)^{-1}=a$. מכאן נובע כי $y^{-1}x\in N_G(a)$, ז"א, $y^{-1}xN_G(a)=N_G(a)$ שגורר כי $xN_G(a)=yN_G(a)$ או כי $\bar{x}=\bar{y}$.

טענה 3. f היא על.

הוכחת הטענה. יהי $xax^{-1}\in Cl(a)$. אזי $xax^{-1}=f\left(\bar{x}\right)$.

תוצאה 8.10. (נוסחת המחלקה 2) תהי G חבורה סופית יהיו $a_1,\ldots,a_n$ נציגים של כל מחלקות הצמידות השונות של G, פרט מאיברי $Z(G)$. אזי $|G|=|Z(G)|+\sum_{i=1}^{n}(G:N_G(a_i))$.

הגדרה. יהי p מספר ראשוני. חבורה סופית G היא *חבורת* - p אם קיים מספר טבעי n כך ש- $|G|=p^n$.

משפט 8.11. תהי G חבורת - p. אזי $Z(G)\neq\{1\}$.

הוכחה. כאשר $|G|=|Z(G)|+\sum_{i=1}^{n}(G:N_G(a_i))$ לכן $a_1,\ldots,a_n\notin Z(G)$. לכל $1\le i\le n$ $(G:N_G(a_i))=|Cl(a_i)|>1$. אבל $|G|$ | $(G:N_G(a))$ לפי תוצאה 7.21

ולכן $p|(G:N_G(a_i))$ לכל $1\le i\le n$. נתון כי $p||G|$. מכאן נובע כי $p|(|G|-\sum_{i=1}^{n}(G:N_G(a_i)))|=|Z(G)|$. מכאן נובע כי $|Z(G)|>1$.

<u>הערה 8.12.</u> תהי G חבורה קומוטטיבית סופית ויהי p מספר ראשוני כך ש- $p||G|$. אזי קיים $a\in G$ כך ש- $|a|=p$.

<u>הוכחה.</u> אם $|G|=p$ אזי $|a|=p$ לכל $1\ne a\in G$. נניח כי $|G|>p$ ונניח כי לכל חבורה H המקיימת : $|H|<|G|$ ו- $p||H|$ קיים $a\in H$ כך ש- $|a|=p$. יהי $1\ne b\in G$ ויהי $|b|=m$. אם $p|m$ אזי $a=b^{m/p}\in G$ ו- $|a|=p$. לכן ניתן להניח כי $p\nmid m$. תהי $\overline{G}=G/<b>$. אזי $|\overline{G}|<|G|$ ו- $p||\overline{G}|$, לכן לפי הנחת האינדוקציה קיים $c\in G$ כך שהסדר של $\overline{c}=c<b>$ ב- $G/<b>$ הוא p. מכאן נובע כי $c^p<b>=<b>$ או ש- $c^p\in<b>$. אם $c^p=1$ אזי נבחר $a=c$, אם לאו, נבחר $a=c^m$. אזי $a\in G$ ו- $|a|=p$.

<u>משפט 8.13.</u> (משפט קושי). תהי G חבורה סופית ויהי p מספר ראשוני. אזי קיים $a\in G$ כך ש- $|a|=p$.

<u>הוכחה.</u> נניח כי לכל חבורה H המקיימת : $|H|<|G|$ ו- $p||H|$ קיים $a\in H$ כך ש- $|a|=p$. לפי נוסחת המחלקה, קיימים $a_1,\ldots,a_n\in G\setminus Z(G)$ כך ש- $|G|=|Z(G)|+\sum_{i=1}^{n}(G:N_G(a_i))$. לכל $1\le i\le n$ החבורה $N_G(a_i)$ היא ח"ח ממש של G, כי $N_G(a_i)=G$ גורר כי $a_i\in Z(G)$. לכן $p\nmid|N_G(a_i)|$ לכל $1\le i\le n$. אבל $|G|=(G:N_G(a_i))\cdot|N_G(a_i)|$ ולכן $p|(G:N_G(a_i))$ לכל $1\le i\le n$. מכאן נובע כי $p|(|G|-\sum_{i=1}^{n}(G:N_G(a_i)))|=|Z(G)|$. על פי הערה 8.12 קיים $a\in Z(p)\le G$ כך ש- $|a|=p$.

בהמשך G היא חבורה סופית מסדר $p^m s$ כאשר p הוא ראשוני, $m\ge 1$ ו- $p\nmid s$.

<u>הגדרה.</u> חבורה חלקית של G מסדר p^m נקראת *חבורה חלקית p - סילו של G*.

קיומה של ח"ח p - סילו של G מובטחת ע"י המשפט הבא :

<u>משפט 8.14.</u> (משפט סילו הראשון). לכל $1\le i\le m$ יש ל- G ח"ח מסדר p^i.

<u>הוכחה.</u> נניח כי לכל חבורה H, אם $|H|<|G|$ ו- $|H|=p^{m'}t$ כאשר $m'\le m$ ו- $p\nmid t$, אזי יש ל- H ח"ח מסדר p^i לכל $1\le i\le m'$. לפי נוסחת המחלקה, קיימים $a_1,\ldots,a_n\in G\setminus Z(G)$ כך ש- $|G|=|Z(G)|+\sum_{i=1}^{n}(G:N_G(a_i))$. אם קיים $1\le i\le n$

כך ש- $p\nmid(G:N_G(a_i))$ אזי $p^m\mid N_G(a_i)$ ולפי הנחת האינדוקציה יש ל- $N_G(a_i)$ ח"ח מסדר p^i לכל $1\le i\le m$, ולכן יש גם ל- G ח"ח מסדר p^i לכל $1\le i\le m$. מכאן ניתן להניח כי $p\mid(G:N_G(a_i))$ לכל $1\le i\le n$. נתון כי $p\mid\mid|G|$ ולכן $p\mid\mid|G|-\sum_{i=1}^{n}(G:N_G(a_i))|=|Z(G)|$. מהערה 8.12 או משפט 8.13 קיים $a\in Z(G)$ כך ש- $|a|=p$. תהי $\overline{G}=G/<a>$. מהנחת האינדוקציה, לכל $1\le i\le m-1$ קיימת $\overline{H}\le\overline{G}$ כך ש- $|\overline{H}|=p^i$ כאשר $\overline{H}=H/<a>$ ו- $<a>\le H\le G$. מכאן נובע כי $|H|=|\overline{H}|\cdot|<a>|=p^{i-1}\cdot p=p^i$. הוכחנו כי יש ל- G ח"ח מסדר p^i לכל $2\le i\le m$. יש ל- G ח"ח מסדר $p^1=p$ ממשפט 8.13.

בהמשך P היא חבורה חלקית p-סילו של G. נסמן $Cl(P)=\{xPx^{-1}:\ x\in G\}$. ברור כי כל איברי $Cl(P)$ הם חבורות חלקיות p - סילו של G. נראה בהמשך שכל חבורה חלקית p-סילו של G שייכת ל- $Cl(P)$.

<u>הערה 8.15.</u> $|Cl(P)|=(G:N_G(P))$.

<u>הוכחה.</u> נגדיר $f:G/N_G(P)\to Cl(P)$ ע"י $f(\bar{x})=xPx^{-1}$ לכל $x\in G$, כאשר $\bar{x}=xN_G(P)$.

<u>טענה</u> f מגדרת היטב.

<u>הוכחת הטענה.</u> יהיו $x,y\in G$ כך ש- $\bar{x}=\bar{y}$. אזי קיים $n\in N_G(P)$ כך ש- $y=xn$. לכן $f(\bar{y})=yPy^{-1}=x(nPn^{-1})x^{-1}=xPx^{-1}=f(\bar{x})$.

<u>טענה</u> f היא חח"ע.

<u>הוכחת הטענה.</u> יהיו $x,y\in G$ כך ש- $f(\bar{x})=f(\bar{y})$ אזי $xPx^{-1}=yPy^{-1}$. נובע מכאן כי $(x^{-1}y)P(x^{-1}y)^{-1}=P$ או ש- $x^{-1}y\in N_G(P)$. זה גורר כי $x^{-1}yN_G(P)=N_G(P)$ ולכן $\bar{y}=yN_G(P)=xN_G(P)=\bar{y}$.

<u>טענה</u> f היא על.

<u>הוכחת הטענה.</u> יהי $xPx^{-1}\in Cl(P)$. אזי $xPx^{-1}=f(\bar{x})$.

<u>תוצאה 8.16.</u> $s\mid|Cl(P)|$ ולכן $p\nmid|Cl(P)|$.

<u>הוכחה.</u> $|G|=(G:N_G(P))\cdot|N_G(P)|$ ו- $|N_G(P)|=(N_G(P):P)\cdot|P|$. לכן $|G|=(G:N_G(P))\cdot(N_G(P):P)\cdot p^m$. מכאן נובע כי $s=(G:N_G(P))\cdot(N_G(P):P)$.

אם $K\le N_G(P)$ אזי ברור כי $KP=PK$ ולכן $KP\le G$ לפי הערה 7.10.

<u>הערה 8.17.</u> תהי $H\le G$ חבורת-p. אזי $H\cap P=H\cap N_G(P)$.

<u>הוכחה.</u> תהי $H_1=H\cap N_G(P)$. צריך להוכיח כי $H_1=H\cap P$. מכיוון ש- $H_1\le N_G(P)$ נובע כי $H_1P\le G$. ממשפט האיזומורפיזם השני

$H_1P/P \simeq H_1/(H_1 \cap P)$. זה גורר כי $|H_1P| = |H_1/(H_1 \cap P)| \cdot |P|$. שני הגורמים באגף ימין של השוויון האחרון הם חזקות של p. קיבלנו ש- H_1P היא חבורת-p. אבל $P \le H_1P$ ו- P היא חבורת-p חלקית של G מסדר מכסימלי. לכן $H_1P = P$ ו- $H_1 \le P$ או $H_1 = H_1 \cap P$. זה גורר כי $H_1 = H_1 \cap P = H \cap N_G(P) \cap P = H \cap P$.

<u>הערה 8.18.</u> תהי $\varnothing \ne S \subseteq G$, תהי $H \le G$, ותהי $Cl(S) = \{aSa^{-1} : a \in G\}$. נגדיר יחס $\underset{H}{\sim}$ על $Cl(S)$ ע"י $T \underset{H}{\sim} U$ אם קיים $h \in H$ כך ש- $T = hUh^{-1}$, לכל $T,U \in Cl(S)$. היחס $\underset{H}{\sim}$ הוא יחס שקילות על $Cl(S)$.

<u>הוכחה.</u>

1) רפלקסיביות : $T = 1 \cdot T \cdot 1^{-1}$ לכל $T \in Cl(S)$.

2) סימטריות : אם $T = hUh^{-1}$ אזי $U = h^{-1}T(h^{-1})^{-1}$, לכל $T,U \in Cl(S)$.

3) טרנזיטיביות : אם $T = h_1Uh_1^{-1}$ ו- $U = h_2Vh_2^{-1}$ אזי $T = (h_1h_2)V(h_1h_2)^{-1}$ לכל $T,U,V \in Cl(S)$.

<u>סימן.</u> תהי $\varnothing \ne S \subseteq G$ ויהי $T \in Cl(S)$. מחלקת השקילות של T תחת היחס $\underset{H}{\sim}$ היא $Cl_H(T) = \{hTh^{-1} : h \in H\}$.

<u>הערה 8.19</u> תהי $\varnothing \ne S \subseteq G$ ויהי $T \in Cl(S)$. אזי $|Cl_H(T)| = (H : H \cap N_G(T))$.

<u>הוכחה.</u> נגדיר $f : H/(H \cap N_G(T)) \to Cl_H(T)$ ע"י $f(h) = hTh^{-1}$ לכל $h \in H$. המשך ההוכחה היא כמעט זהה להוכחת הערה 8.15 ונשארת כתרגיל לקורא.

<u>משפט 8.20.</u> (משפט סילו שני). תהי $H \le G$ חבורת-p. אזי קיים $x \in G$ כך ש- $H \le xPx^{-1}$.

<u>הוכחה.</u> יהיו $P_1,\ldots,P_t$ נציגים של כל מחלקות השקילות השונות של $Cl(P)$ תחת היחס $\underset{H}{\sim}$. אזי $|Cl(P)| = \sum_{i=1}^{t} Cl_H(P_i) = \sum_{i=1}^{t} (H : H \cap N_G(P_i)) = \sum_{i=1}^{t} (H : H \cap P_i)$ (*). מכיוון ש- H היא חבורת - p ו- $|H| \mid (H : H \cap P_i)$ נובע כי $(H : H \cap P_i)$ = חזקה של p. אבל $p \nmid |Cl(P)|$ מתוצאה 8.15, לכן קיים $1 \le j \le t$ כך ש- $(H : H \cap P_j) = 1$. מכאן נובע כי $H \cap P_j = H$ או ש- $H \le P_j$. אבל $P_j \in Cl(P)$ ולכן קיים $x \in G$ כך ש- $P_j = xPx^{-1}$.

תוצאה מידית של משפט 8.20 היא :

<u>תוצאה 8.21.</u> $Cl(P)$ = קבוצת כל חבורות החלקיות p - סילו של G.

<u>הגדרה.</u> G היא *חבורה פשוטה* אם אין ל- G ח"ח נורמליות פרט מן {1} ו- G.

ההערה הבאה היא טריוויאלית.

<u>הערה 8.22.</u> ח"ח $N \le G$ היא נורמלית ב- G אם ורק אם $Cl(N) = \{N\}$.

<u>משפט 8.23.</u> (משפט סילו שלישי). יהי $n_p =$ מספר חבורת p - סילו של חבורה G. אזי $n_p \equiv 1 \bmod p$ ו- $n_p | s$.

<u>הוכחה.</u> תוצאות 8.16 ו- 8.21 גוררות כי $n_p | s$. לפי תוצאה 8.21 מספיק להוכיח כי $|Cl(P)| \equiv 1 \bmod p$. נציב P במקום H בשויון (*) בהוכחת משפט 8.20 ונקבל $|Cl(P)| = \sum_{i=1}^{t} (P : P \cap P_i)$ (*). כמו בהוכחת משפט 8.20, קיים $1 \le j \le t$ כך ש- $P = P \cap P_j$. אבל $|P| = |P_j|$ כי P ו- P_j הן שתיהן חבורות חלקיות p - סילו של G ולכן $P = P_j$. החבורות $P_1, \ldots, P_t$ הן שונות זו מזו ולכן $P \cap P_i$ היא ח"ח ממש של P ו- $(P : P \cap P_i)$ הוא חזקה חיובית של p לכל $i \ne j$. קיבלנו כי מחובר אחד באגף ימין של שויון (*) שווה 1, ויתר המחוברים הם חזקות חיוביות של p. נובע מכאן כי $|Cl(P)| \equiv 1 \bmod p$.

מעכשיו אין הגבלות על החבורה G.

<u>דוגמה.</u> יהי $|G| = 15$. אזי G איננה פשוטה.
<u>הוכחה.</u> תהי P חבורה חלקית 5 - סילו של G. מתוצאה 8.21 ומשפט 8.23 קיים מספר שלם לא שלילי k כך ש- $|Cl(P)| = 5k+1$. מתוצאה 8.16 נובע כי $5k+1 | 3$. לכן $k = 0$ ו- $P \trianglelefteq G$ מהערה 8.22.

<u>דוגמה.</u> יהי $|G| = pq$ כאשר p, q הם ראשונים שונים. אזי G איננה פשוטה.
<u>הוכחה.</u> כמעט זהה להוכחת הדוגמה הקודמת כאשר הגדול בין שני הראשונים משחק את התפקיד של 5.

<u>דוגמה.</u> יהי $|G| = 12$. אזי G איננה פשוטה.
<u>הוכחה.</u> מספר חבורות חלקיות 3 - סילו של G הוא $3k+1$ ממשפט 8.23 ו- $3k+1 | 4$ מתוצאה 8.16. נובע מכאן כי מספר ח"ח 3 - סילו של G הוא 1 או 4. אם יש רק ח"ח 3 - סילו 1 אזי אותה חבורה היא נורמלית ב- G. אם יש ל- G ארבע ח"ח מסדר 3, אזי החיתוך של כל שתי ח"ח שונות מסדר 3 הוא החבורה $\{1\}$. כל אחת מארבע ח"ח אילו מכילה 2 איברים, פרט מן האיבר הנויטרלי המשותף לכולן. לכן מספר האיברים באיחוד של חבורות החלקיות מסדר 3 הוא 9. נשארו ב- G עוד 3 איברים שביחד עם האיבר הנויטרלי, מרכיבים את כל החבורות החלקיות של G מסדר 4. ברור מכאן שיש ל- G רק ח"ח אחת מסדר 4 והיא נורמלית ב- G.

משפט 8.24. תהי $G \neq \{1\}$ חבורה קומוטטיבית. G היא פשוטה אם ורק אם היא ציקלית מסדר ראשוני.

הוכחה. כל ח"ח של חבורה קומוטטיבית היא נורמלית, לכן $G = < a >$ לכל $1 \neq a \in G$. אם חבורה ציקלית איננה מסדר ראשוני אזי יש לה חבורה חלקית שונה מ- G ושונה מ- $\{1\}$ מתוצאה 4.7, תוצאה 4.8 ומשפט 4.11. לכן G היא ציקלית מסדר ראשון. בכיוון הפוך, אם G היא ציקלית מסדר ראשוני אזי ברור כי היא פשוטה.

החבורה $S_1 = \{1\}$ ו- S_2 היא ציקלית מסדר 2 ולכן פשוטה. לכל $n \geq 3$ יש ל- S_n ח"ח ממש, נורמלית, A_n ולכן היא איננה פשוטה. החבורה $A_2 = \{1\}$ ו- A_3 היא ציקלית מסדר 3 ולכן היא פשוטה. הוכחת המשפט הבא לא תינתן כאן :

משפט 8.25. A_n היא פשוטה לכל $n \geq 5$.

הערה 8.26. A_4 איננה פשוטה.

הוכחה. תהי $H = \{1, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$. ע"י בנית לוח כפל עבור H ניתן לראות כי המכפלה של שני איברים ב- H שייך ל- H. כל איבר $x \in H$ מקיים $x^2 = 1$ ולכן $x^{-1} = x$, ז"א ההפכי של כל איבר ב- H שייך ל- H. קיבלנו כי H היא ח"ח של A_4. יהי $1 \neq x \in H$. אזי קיים $\sigma \in S_n$ כך ש- $x = (\sigma(1), \sigma(2))(\sigma(3), \sigma(4))$. לכל $\tau \in A_4$ מתקיים $\tau x \tau^{-1} = (\tau\sigma(1), \tau\sigma(2))(\tau\sigma(3), \tau\sigma(4)) \in H$.

בהוכחת הערה 8.26 יכולנו לבחור τ באופן שרירותי מ- S_4 ולהראות כי $H \trianglelefteq S_4$.