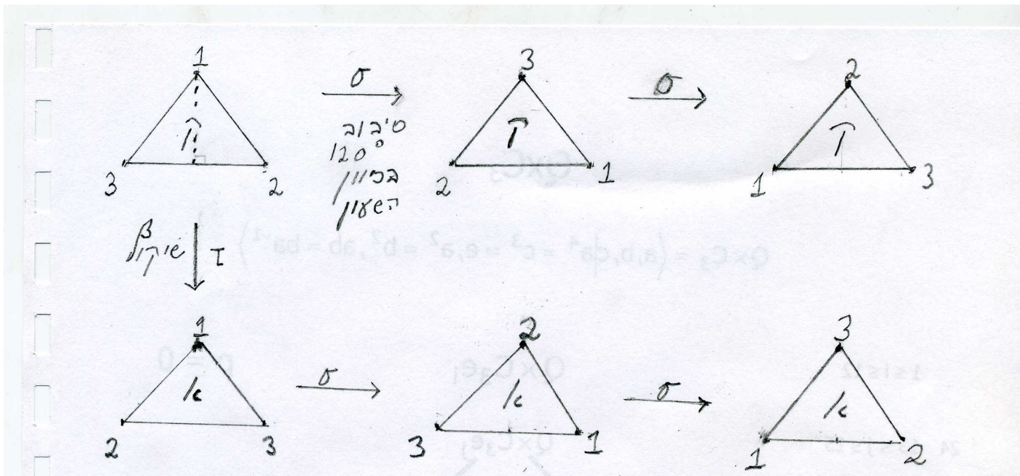
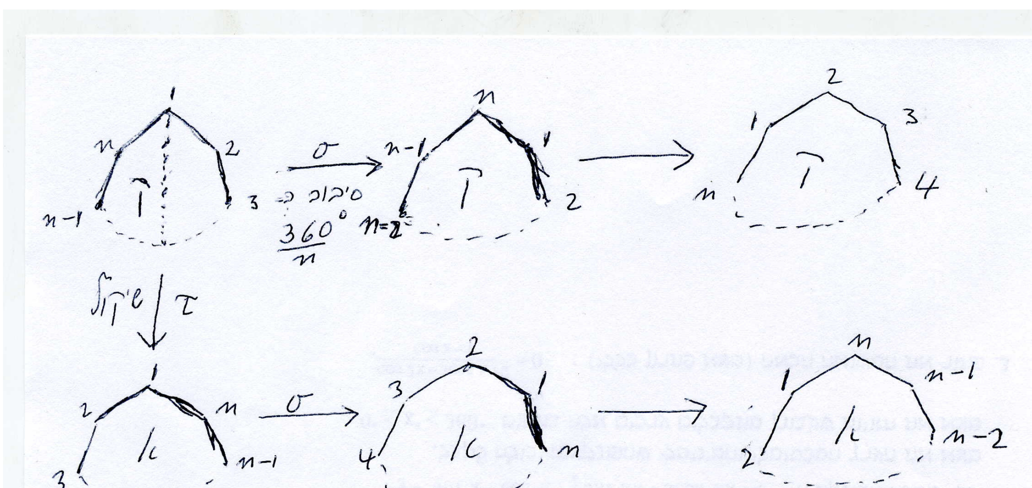
פרק 9

סימטריה של משולש שווה צלעות היא סיבוב או שיקוף המעתיק את המשולש למשולש זהה במישור. בציור הבא נמצאות כל הסימטריות של משולש שווה צלעות. בשורה הראשונה רואים את המשולש מקדים. בשורה השניה רואים את המשולש מאחור.



למצולע משוכלל עם n צלעות יש $2n$ סימטריות והן :



הסימטריות של מצולע משוכלל עם n צלעות מהוות חבורה $D_n = \{1, \sigma, \ldots, \sigma^{n-1}, \tau, \sigma\tau, \ldots, \sigma^{n-1}\tau\}$.

<u>הגדרה.</u> קוראים ל- D_n *החבורה הדיהדרלית* מסדר $2n$.

ניתן לראות את D_n כחבורה חלקית של S_n כאשר 1 הוא תמורת הזהות, $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n-1 & n\\ 2 & 3 & \cdots & n & 1\end{pmatrix}$ ו- $\tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n-1 & n\\ 1 & n & \cdots & 3 & 2\end{pmatrix}$. החבורה $D_3=S_3$, אבל לכל $n>3$ החבורה D_n היא ח"ח ממש של S_n. החבורה D_n מקיימת את התנאים $|\sigma|=n, |\tau|=2$, ו- $\tau\sigma=\sigma^{-1}\tau$.

יהיו G,H חבורות. קל לוודא כי המכפלה הקרטזית $G\times H$ עם הפעולה $(g_1,h_1)(g_2,h_2)=(g_1g_2,h_1h_2)$ לכל $g_1,g_2\in G$ ולכל $h_1,h_2\in H$ היא חבורה. כמובן הביטויים g_1g_2 ו- h_1h_2 מחושבים ע"י הפעולות ב- G וב- H בהתאמה.

__הגדרה.__ יהיו G,H חבורות. החבורה $G\times H$ עם הפעולה הנ"ל נקראת *המכפלה הישרה (החיצונית) של G ו- H*.

__דוגמה__. תהי $\mathbb{Z}$ חבורת המספרים השלמים עם פעולה חיבור, ותהי $\mathbb{Q}^*$ חבורת המספרים הרציונלים השונים מ- 0 עם פעולה כפל. האיבר הנויטרלי ב- $\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}^*$ הוא $(0,1)$. יהיו $x=(2,1/2), y=(3,3/4)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}^*$ אזי $xy=(5,3/8)$ ו- $y^{-1}=(-3,4/3)$.

ניתן להכליל ולהגדיר באופן טבעי המכפלה הישרה (החיצונית) $G_1\times\cdots\times G_k$ של חבורות $G_1,\ldots,G_k$.

יהיו H,K חבורות חלקיות של חבורה G. אם $hk=kh$ לכל $h\in H$ ולכל $k\in K$ אזי ברור כי $HK=KH$ ולכן HK היא ח"ח של G על פי הערה 7.10.

__הגדרה.__ יהיו H,K חבורות חלקיות של G המקיימות:
1) $hk=kh$ לכל $h\in H$ ו- $k\in K$.
2) $H\bigcap K=\{1\}$.

אזי קוראים ל- HK *המכפלה הישרה (הפנימית) של H ו- K*.

__דוגמה.__ יהיו $G=\mathbb{Z}(6)=<a>=\{1,a,\ldots,a^5\}, H=\{1,a^3\}, K=\{1,a^2,a^4\}$ מכיוון ש- G היא קומוטטיבית תנאי 1) מתקיים. רואים כי $H\bigcap K=\{1\}$. חישוב מראה כי $G=HK$. קיבלנו כי $\mathbb{Z}(6)$ היא מכפלה ישרה פנימית $\mathbb{Z}(6)=\mathbb{Z}(2)\cdot\mathbb{Z}(3)$.

__דוגמה.__ תהי $G=Gl(n,\mathbb{R})$ חבורת המטריצות $n\times n$ עם רכיבים מספרים ממשיים, עם דיטרמיננטה שונה מ- 0 כאשר n הוא מספר אי זוגי. תהי $H=\{I,-I\}$ ותהי $K=\{A\in G : \det(A)>0\}$. קל לוודא כי H ו- K הן ח"ח של G. המטריצות I ו- $-I$ מתחלפות עם כל מטריצה בכפל, ולכן תנאי 1) של ההגדרה של מכפלה פנימית מתקיים. מן הנתון n אי זוגי נובע כי $\det(-I)=-1$ ולכן $H\bigcap K=\{I\}$. יהי $A\in G$. אם $\det(A)>0$ אזי $A=IA$ כאשר $I\in H$ ו- $A\in K$. אם $\det(A)<0$ אזי

$A=(-I)(-A)$ כאשר $-I\in H$ ו- $-A\in K$. קיבלנו כי $G=HK$, ז"א, G היא המכפלה הפנימית של H ו- K.

הערה 9.1. יהיו H,K ח"ח של G המקיימות תנאים 1) ו- 2) של ההגדרה של מכפלה ישרה פנימית. אזי $H\times K\simeq HK$.

הוכחה. נגדיר פונקציה $f:H\times K\to HK$ על ידי $f((h,k))=hk$ לכל $(h,k)\in H\times K$.

טענה 1) f היא הומומורפיזם.

הוכחת הטענה. יהיו $x_1=(h_1,k_1)$ ו- $x_2=(h_2,k_2)$ ב- $H\times K$. אזי $f(x_1x_2)=f(h_1h_2,k_1k_2)=h_1h_2k_1k_2=(h_1k_1)(h_2k_2)=f(x_1)f(x_2)$.

טענה 2) f היא חח"ע.

הוכחת הטענה. יהי $(h,k)\in\ker f$. אזי $f((h,k))=hk=1$. מכאן נובע כי $h=k^{-1}$ ולכן $h\in H\bigcap K=\{1\}$. קיבלנו כי $h=1$ וזה גורר ש- $k=1$. מכאן ש- $\ker f=\{(1,1)\}$.

טענה 3) f היא על.

הוכחת הטענה. $hk=f((h,k))$ לכל $hk\in HK$.

הערה 9.2. יהיו G ו- H חבורות ויהיו $a\in G,\ b\in H$ איברים מסדר סופי; $|a|=n$ ו- $|b|=m$. אזי הסדר של $(a,b)\in G\times H$ הוא $[n,m]$.

הוכחה. קיימים מספרים טבעיים s,t כך ש- $[n,m]=ns=mt$. לכן $(a,b)^{[n,m]}=((a^n)^s,(b^m)^t)=(1,1)$. לכל מספר טבעי k, אם $(a,b)^k=(1,1)$ אזי $a^k=1$ ו- $b^k=1$. מכאן נובע כי k הוא כפולה משותפת של n ו- m ולכן $[n,m]\le k$.

מהערה 9.1 והדוגמה הראשונה אחרי ההגדרה של מכפלה ישרה פנימית, נובע כי $\mathbb{Z}(2)\times\mathbb{Z}(3)=\mathbb{Z}(6)$. ההערה הבאה מכלילה עובדה זו.

הערה 9.3. $\mathbb{Z}(n)\times\mathbb{Z}(m)$ היא חבורה ציקלית אם ורק אם $(n,m)=1$ ואז $\mathbb{Z}(n)\times\mathbb{Z}(m)=\mathbb{Z}(nm)$.

הוכחה. תהי $\mathbb{Z}(n)=<a>$ ותהי $\mathbb{Z}(m)=<b>$. ידוע כי $|\mathbb{Z}(n)\times\mathbb{Z}(m)|=nm$. לכן $\mathbb{Z}(n)\times\mathbb{Z}(m)$ היא ציקלית אם ורק אם קיים $x\in\mathbb{Z}(n)\times\mathbb{Z}(m)$ כך ש- $|x|=nm$. נניח כי $(n,m)=1$. יהי $x=(a,b)$. הערה 9.2 גוררת כי $|x|=[n,m]=nm$ ו- $\mathbb{Z}(n)\times\mathbb{Z}(m)=<x>$. נניח כי $(n,m)>1$. יהי $z\in\mathbb{Z}(n)\times\mathbb{Z}(m)$. אזי קיימים מספרים טבעיים k,l כך ש- $z=(a^k,b^l)$. לכן $z^{[n,m]}=(a^{[n,m]k},b^{[n,m]l})=(1,1)$. אבל $[n,m]=(nm)/(n,m)<nm$. לכן אין איבר מסדר nm ב- $\mathbb{Z}(n)\times\mathbb{Z}(m)$.

המשפט הבא לא יוכח.

משפט 9.4. כל חבורה קומוטטיבית סופית היא מכפלה ישרה של חבורות ציקליות מסדר חזקה של ראשוני.

דוגמה. החבורות הקומוטטיביות מסדר 36 הן :

1) $\mathbb{Z}(2)\times\mathbb{Z}(2)\times\mathbb{Z}(3)\times\mathbb{Z}(3)$

2) $\mathbb{Z}(2)\times\mathbb{Z}(2)\times\mathbb{Z}(9)$

3) $\mathbb{Z}(4)\times\mathbb{Z}(3)\times\mathbb{Z}(3)$

4) $\mathbb{Z}(4)\times\mathbb{Z}(9)$.

תרגיל. הראה כי כל שתי חבורות מתוך ארבעת החבורות בדוגמה הקודמת אינן איזומורפיות.

הערה 9.5. תהי G חבורה מסדר p^2 כאשר p הוא ראשוני. אזי G היא קומוטטיבית.

הוכחה. $Z(G)\neq\{1\}$ לפי משפט 8.11 לכן קיים, על פי הערה 8.12 או משפט קושי, $a\in Z(G)$ כך ש- $|a|=p$. החבורה $<a>$ היא נורמלית ב- G ו- $G/<a>$ היא חבורה ציקלית מסדר p. נובע מכאן כי $G=\bigcup_{i=0}^{p-1} b^i<a>$ כאשר $b\in G\setminus<a>$. לכן כל איבר ב- G הוא מן הצורה b^ia^j כאשר $0\le i,j\le p-1$. מכיוון שחזקות של a הן במרכז של G וחזקות של b מתחלפות בכפל, נובע כי כל שני איברים מן הצורה הנ"ל מתחלפות בכפל, ז"א, G היא קומוטטיבית.

ממשפט 9.4 והערה 9.5 יש לנו

תוצאה 9.6. תהי G חבורה מסדר p^2 כאשר p הוא ראשוני. אזי או $G=\mathbb{Z}(p^2)$ או $G=\mathbb{Z}(p)\times\mathbb{Z}(p)$.

הערה 9.7. תהי G חבורה מסדר $2p$ כאשר p הוא ראשוני אי זוגי. אזי או $G\simeq\mathbb{Z}(2p)$ או $G\simeq D_p$.

הוכחה. אם G היא קומוטטיבית אזי $G\simeq\mathbb{Z}(2p)$ ממשפט 9.4 והערה 9.3. נניח כי G איננה קומוטטיבית. ממשפט סילו הראשון או ממשפט קושי, יש ל- G חבורות חלקיות $\mathbb{Z}(p)=<a>$ ו- $\mathbb{Z}(2)=<b>$. ממשפט סילו השלישי $<a>$ היא החבורה החלקית הבלעדית של G מסדר p וכן $G\trianglerighteq<a>$. החבורה $G=<a>\bigcup<a>b$ וכל איברי המחלקה הימנית $<a>b$ הם מסדר 2. לכן $abab=1$ או $ab=b^{-1}a^{-1}=ba^{-1}$. קיבלנו ש- $G=\{1,a,\ldots,a^{p-1},b,ab,\ldots,a^{p-1}b\}$ כאשר $|a|=p,\ |b|=2$ ו- $ab=ba^{-1}$, ז"א, $G\simeq D_p$.

חבורות מסדר נמוך

החבורה היחידה, עד איזומורפיזם, מסדר 1 היא $\{1\}$. חבורה מסדר ראשוני היא ציקלית לכן החבורות היחידות מסדר $13,11,7,5,3,2$ הן $\mathbb{Z}(2),\mathbb{Z}(3),\mathbb{Z}(5),\mathbb{Z}(7),\mathbb{Z}(11),$ $\mathbb{Z}(13)$ בהתאמה. מהערה 9.6 נובע כי החבורות היחידות, עד איזומורפיזם, מסדר 4 הן $\mathbb{Z}(4)$ ו- $\mathbb{Z}(2)\times\mathbb{Z}(2)$; ומסדר 9 הן $\mathbb{Z}(9)$ ו- $\mathbb{Z}(3)\times\mathbb{Z}(3)$. הערה 9.7 גוררת כי החבורות מסדר 6 הן $\mathbb{Z}(6)$ ו- $D_3=S_3$; מסדר 10 הן $\mathbb{Z}(10)$ ו- D_5; ומסדר 14 הן $\mathbb{Z}(14)$ ו- D_7.

החבורות הקומוטטיביות מסדר 8 הן $\mathbb{Z}(8)$, $\mathbb{Z}(2)\times\mathbb{Z}(4)$ ו- $\mathbb{Z}(2)\times\mathbb{Z}(2)\times\mathbb{Z}(2)$. תהי G חבורה לא קומוטטיבית מסדר 8. אזי אין ל- G איבר מסדר 8 כי G איננה ציקלית. נשאיר לקורא להוכיח כי כל חבורה H המקיימת $x^2=1$ לכל $x\in H$ היא קומוטטיבית. לכן קיים איבר $a\in G$ כך ש- $|a|=4$. יהי $b\in G\setminus <a>$. אזי $G=<a>\bigcup <a>b$ ולכן:

$$G=\{1,a,a^2,a^3,b,ab,a^2b,a^3b\} \qquad (*).$$

החבורה $<a>$ היא נורמלית ב- G כי $(G:<a>)=2$, ולכן $b^{-1}ab\in <a>$. אבל $|b^{-1}ab|=|a|=4$. האיברים ב- $<a>$ מסדר 4 הם a ו- $a^{-1}=a^3$. אם $b^{-1}ab=a$ אזי $ab=ba$ ו- G היא קומוטטיבית, סתירה. לכן $b^{-1}ab=a^{-1}$, ז"א, $ab=ba^{-1}$. ישנם שני מקרים לבדוק: 1) $|b|=2$ ו- 2) $|b|=4$. במקרה 1) G היא חבורה מצורה (*) המקיימת $|a|=4,|b|=2$ ו- $ab=ba^{-1}$. קיבלנו כי $G\simeq D_3$. נניח כי $|b|=4$. החבורה $G/<a>$ היא ציקלית מסדר 2 ולכן $(b<a>)^2=b^2<a>=<a>$. מכאן נובע כי $b^2\in <a>$. אבל $|b^2|=2$ והאיבר היחיד מסדר 2 ב- $<a>$ הוא a^2. לכן $b^2=a^2$. קיבלנו שאם ישנה חבורה G מסדר 8 המקיימת תנאי מקרה 2), אזי יש ל- G צורה (*), $|a|=|b|=4$, $a^2=b^2$ ו- $ab=ba^{-1}$. חבורה כזאת אכן קיימת. תהי G החבורה החלקית של $Gl(2,\mathbb{C})$ הנוצרת ע"י $a=\begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}$ ו- $b=\begin{pmatrix} 0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}$. קל לוודא כי $G=<a,b>$ היא חבורה מסדר 8 ומקיימת התנאים הנ"ל. החבורה $G=\{b^ia^j\ :\ 0\le i\le 1,\ 0\le j\le 3\}$. אם G_1 היא חבורה מסדר 8 הנוצרת ע"י a_1 ו- b_1 ומקיימות את התנאים הנ"ל אזי לא קשה להוכיח כי ההעתקה $f:G\to G'$ המגדרת ע"י $f(b^ia^j)=b_1^ia_1^j$ לכל $0\le i\le 1$ ו- $0\le j\le 3$ היא איזומורפיזם. לכן חבורה מן הסוג הנ"ל היא בלעדית עד כדי איזומורפיזם.