

## תרגיל 2

ירון עזיזי

Maximize:  $Z=6X_1 + 8X_2$

Subject to:

$$5 X_1+2X_2\leq 20$$

$$X_1+2X_2\leq 10$$

$$X_1\geq 0, X_2\geq 0$$

Comment [1]: אילוצי אי שליליות

הבעיה הדואלית המתאימה:

Minimize  $Y_0 = 20Y_1+10Y_2$

Subject to

$$5Y_1+Y_2\geq 6$$

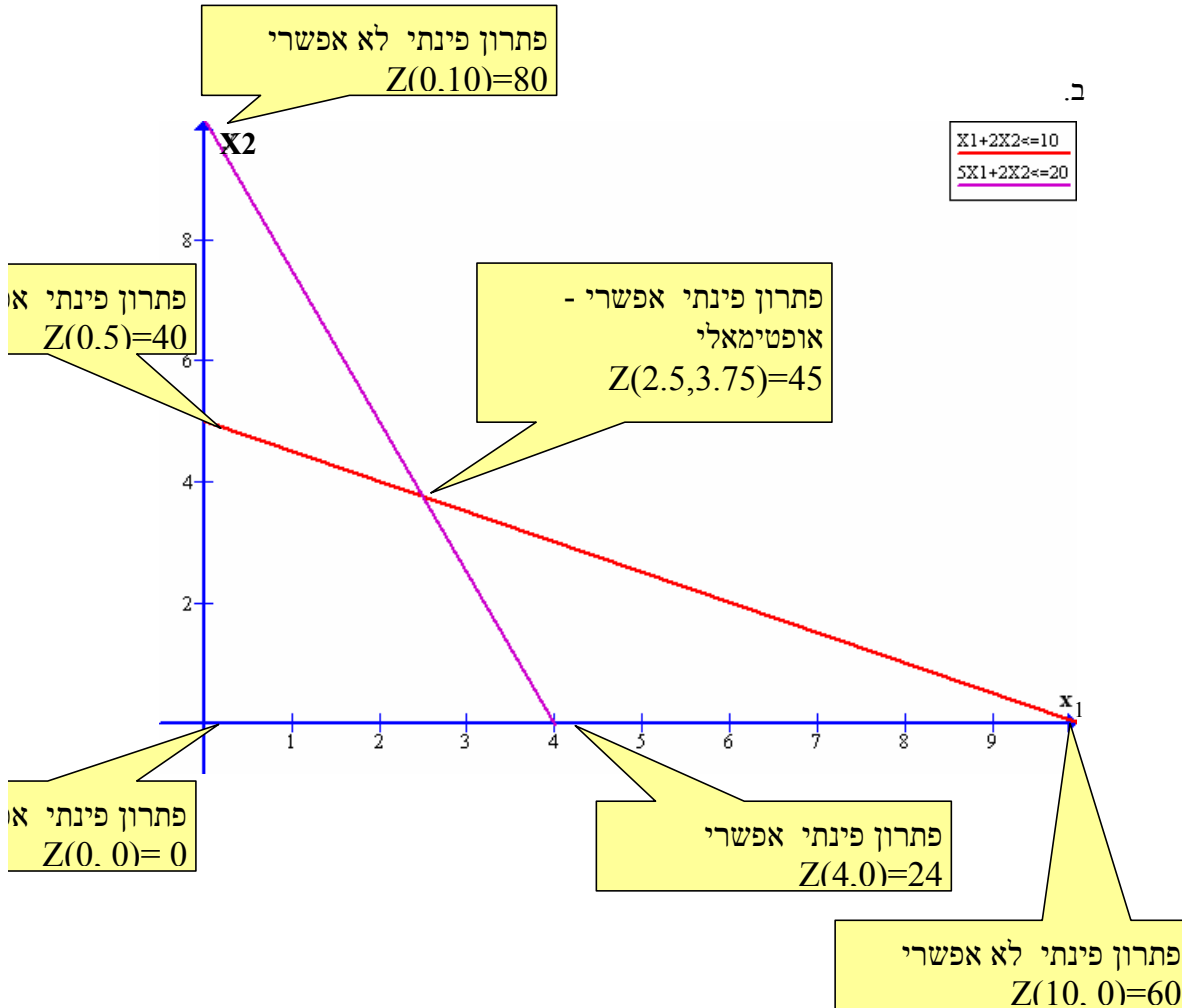
$$2Y_1+2Y_2\geq 8$$

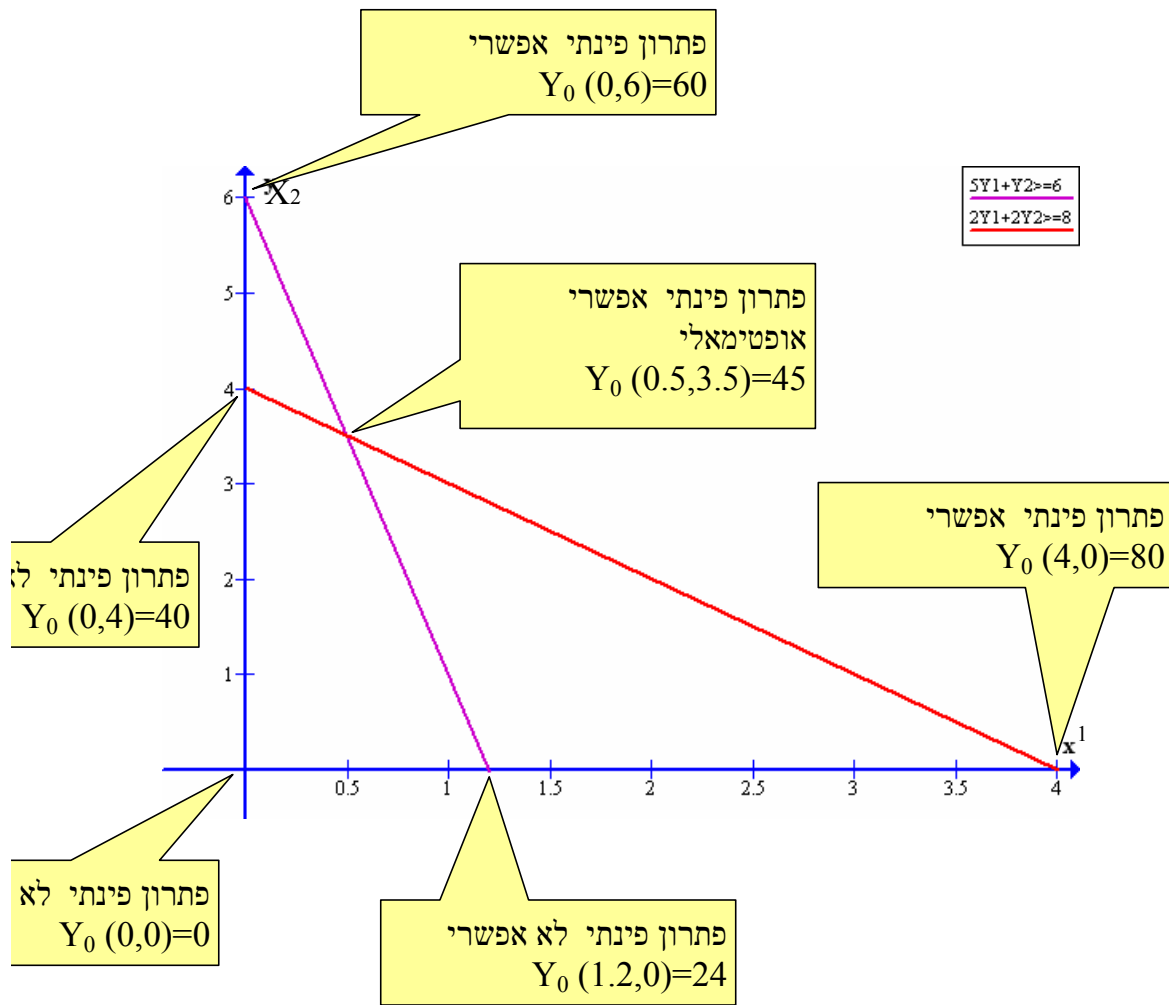
$$Y_1\geq 0, Y_2\geq 0$$

**הסבר:** בשלב הראשון הגדרנו משתנה בבעיה הדואלית מול כל אילוץ בבעיה הפרימלית. כל משתנה הוגדר כגדול או שווה לאפס בגלל שהסימון של האילוצים היה קטן או שווה למשהו. (כל אילוץ עם סימן "קטן מ" בבעיה הפרימלית הופך לגדול או שווה לאפס בבעיה הדואלית) אחרי שהגדרנו את המשתנים ניסחנו את פונקציית המטרה בבעיה הדואלית. כל משתנה בבעיה הדואלית הוכפל בווקטור  $b$  בבעיה הפרימלית (וקטור  $b$  הוא הצד הימני של האילוצים).

המשתנה  $Y_1$  הוכפל בצד הימני של האילוץ הראשון, המשתנה  $Y_2$  באילוץ השני וכו'. לבסוף, ניסחנו את האילוצים של הבעיה הדואלית. מספר האילוצים בבעיה הדואלית שווה למספר המשתנים בבעיה הפרימלית. כדי לנסח את האילוצים נכפיל את המקדמים של המשתנים בבעיה הפרימלית (מטריצה) במשתנים של הבעיה הדואלית (וקטור). בשורה הראשונה של האילוצים הוכפל משתנה  $Y_1$  במקדם של המשתנה  $X_1$  באילוץ הראשון של

הבעיה הפרימלית.  $Y_2$  הוכפל במקדם של  $X_1$  באילון השני והמשתנה (באופן כללי בשורה ה  $j$  של האילוצים הוכפל  $Y_i$  במקדם של  $X_j$  באילון ה  $i$ ) אם המשתנה מוגדר כגדול או שווה לאפס בבעיה הפרימלית אז האילון שמקביל לו בבעיה הדואלית יהיה גדול או שווה למשהו. ואם המשתנה מוגדר כחופשי בבעיה הפרימלית אז האילון המקביל לו בבעיה הדואלית יהיה שווה למשהו. הצד הימני של האילוצים בבעיה הדואלית נקבע ע"י המקדמים של המשתנים בפונקציה המטרה בבעיה הפרימלית.





ג.

דואלית		$Y_0=Z$	פרימלית		מספר
פתרון בסיסי	אפשרי?		אפשרי?	פתרון בסיסי	
(0,0,6,8)	לא	0	כן	(0,0,20,10)	1
(0,4,2,0)	לא	40	כן	(0,5,10,0)	2
(4,0,-14,0)	כן	80	לא	(0,10,0,-10)	3
(0.5,3.5,0,0)	כן	45	כן	(2.5,3.75,0,0)	4
(0,6,0,-4)	כן	60	לא	(10,0,-30,0)	5
(1.2,0,0,2.8)	לא	24	כן	(4,0,0,6)	6

7. שיטת הסימפלקס:

נוסיף משתני סרק ( $X_3, X_4$ ) לכל אחד מהאי-שוויונים. כך נחליף את מערכת האילוצים במערכת משוואות ליניארית:

Maximize:  $Z=6X_1+8X_2$

Subject to:

$5X_1+2X_2+X_3=20$

$X_1+2X_2+X_4=10$

$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$

$X_3 \geq 0, X_4 \geq 0$

Comment [2]: אילוצי אי שליליות

כעת אנחנו נמצאים בפתרון הפינתי:  $Z(0,0) = 0$

**איטרציה ראשונה:**

נסמן בכחול את העמודה שבה בשורה של פונקציית המטרה הערך הוא השלילי הנמוך ביותר ( $X_2$ ). נחשב את היחסים ( $b./X_2$ ). נסמן באדום את השורה עם היחס החיובי המינימלי ( $X_4$ ):

	משתנים בסיסים		משתני סרק			
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	<b>b</b>	יחס
Z	-6	-8	0	0	0	
$X_3$	5	2	1	0	20	10
$X_4$	1	2	0	1	10	5

Comment [3]: חובי מינימלי ביותר

נחלק את השורה המסומנת באדום ב-2 ונקבל:  $\frac{1}{2} \cdot S_2$

	משתנים בסיסים		משתני סרק			
	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	b	יחס
Z	-6	-8	0	0	0	
X <sub>3</sub>	5	2	1	0	20	
X <sub>2</sub>	0.5	1	0	0.5	5	

**[4]** Comment: נוסף לשורה זו 8 פעמים את השורה המסומנת

**[5]** Comment: נחסר משורה זו פעמים את השורה המסומנת

**[6]** Comment: X<sub>4</sub> יצא X<sub>2</sub> נכנס

כעת, נאפס את הערכים בעמודה המסומנת בכחול ונקבל:  $S_2 - 2S_3$ ;  $S_1 + 8 \cdot S_3$

	משתנים בסיסים		משתני סרק			
	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	b	יחס
Z	-2	0	0	4	40	
X <sub>3</sub>	4	0	1	-1	10	
X <sub>2</sub>	0.5	1	0	0.5	5	

כעת אנחנו נמצאים בפתרון הפינתי:  $Z(0,5) = 40$

## איטרציה 2:

נסמן בכחול את העמודה שבה בשורה של פונקציית המטרה הערך הוא השלילי הנמוך ביותר ( $X_1$ ). נחשב את היחסים ( $b./X_1$ ). נסמן באדום את השורה עם היחס החיובי המינימלי ( $X_1$ ):

	משתנים בסיסים		משתני סרק			
	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	b	יחס
Z	-2	0	0	4	40	
X <sub>3</sub>	4	0	1	-1	10	2.5
X <sub>2</sub>	0.5	1	0	0.5	5	10

**[7]** Comment: שלילי קטן ביותר

**[8]** Comment: חיובי מינימלי ביותר

נחלק את השורה המסומנת באדום ב-4, ונקבל:  $\frac{1}{4} \cdot S_2$

	משתנים בסיסים		משתני סרק		b	יחס
	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>		
Z	-2	0	0	4	40	
X <sub>1</sub>	1	0	0.25	-0.25	2.5	
X <sub>2</sub>	0.5	1	0	0.5	5	

**[9] Comment:** נוסף לשורה זו פעמים את השורה המסומנת

**[10] Comment:** X<sub>3</sub> יוצא X<sub>1</sub> נכנס

**[11] Comment:** נחסר משורה זו חצי מהשורה המסומנת

$S_1 + 2 \cdot S_2; S_3 - \frac{1}{2} \cdot S_2$

	משתנים בסיסים		משתני סרק		b	יחס
	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>		
Z	0	0	0.5	3.5	45	
X <sub>1</sub>	1	0	0.25	-0.25	2.5	
X <sub>2</sub>	0	1	-0.125	0.625	3.75	

כעת אנו נמצאים בפתרון הפינתי  $Z(2.5, 3.75) = 45$

אין אף ערך שלילי בשורה של פונקציית המטרה ולכן הפתרון האופטימאלי הוא:

$$Z(2.5, 3.75) = 45$$

**סיכום:**

**התחלה:** פתרון פינתי  $Z(0,0) = 0$  והמשלים  $Y_0(0,0) = 0$  בדואלי.

**איטרציה ראשונה:** X<sub>2</sub> יצא וקיבל ערך 5.

פתרון פינתי  $Z(2.5, 3.75) = 45$  והמשלים  $Y_0(0,4) = 40$  בדואלי.

**איטרציה שנייה:** X<sub>1</sub> יצא.

פתרון הפינתי  $Z(2.5, 3.75) = 45$  והמשלים  $Y_0(0.5, 3.5) = 45$  בדואלי.

**הערה:** כדי לדעת באיזה פיתרון משלים (בבעיה הדואלית) אנחנו נמצאים,

מסתכלים בשורה Z בעמודות המתאימות עבור משתני הסרק.