בס"ד

28.02.2016

המרצה: מיכאל מגרל
www.math.biu.ac.il/~megereli/TOP.html

תרגילים נוספים

מרחבים מטריים -- דוגמאות ותכונות אלמנטריות

1. הוכח שהפונקציות הבאות הן מטריקות ב $\mathbb{R}^n$ ותאר בכל מקרה כדור פתוח $B(a,r)$ כאשר $n=2, a=(1,2), r=5$.

א. $d(x,y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$ Euclidean metric

ב. $d_{\max}(x,y) := \max\{|\ x_i - y_i\ |:\quad 1 \le i \le n\}$ (מסמנים גם d_∞) max-metric

ג. $d_1(x,y) := \sum_{i=1}^{n}|\ x_i - y_i\ |$ taxicab metric (Manhattan)

(במקרה (א) מותר להשתמש ב $< x,y > \le \|x\| \cdot \|y\|$ Cauchy-Scwartz inequality)

קבע משמעות גיאומטרית של שלושת המטריקות הנ"ל עבור $n=2$.

2. הוכח שהפונקציות הבאות הן מטריקות ב $C[a,b]$ ותאר בכל מקרה כדור פתוח $B(z,r)$ כאשר $a=1, b=4, r=3$ ו $z(x) := x^2$

א. $d_{\max}(f,g) := \max\{|\ f(x) - g(x)\ |:\quad a \le x \le b\}$

ב. $d_1(f,g) := \int_a^b |\ f(x) - g(x)\ |\, dx$

ג. $d_2(f,g) = \sqrt{\int_a^b |\ f(x) - g(x)\ |^2}$

(במקרה (ג) מותר להשתמש ב $< x,y > \le \| x \| \cdot \| y \|$ Cauchy-Scwartz inequality).

3. הוכח שלכל קבוצה X הפונקציה הבאה היא מטריקה ותאר את הכדורים $B(a,r), B[a,r]$.

$$d_\Delta(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \ne y \end{cases}$$

4. הוכח כי בכל מרחב מטרי (X,d) מתקיים:

(א) $d(x_1,x_n)\le d(x_1,x_2)+d(x_2,x_3)+\cdots+d(x_{n-1},x_n)$

(ב) $|d(a,b)-d(x,y)|\le d(a,x)+d(b,y)|$

(ג) $|d(x,z)-d(y,z)|\le d(x,y)$

(ד) (X,cd) מרחב מטרי לכל $c>0$ קבוע.

(ה) (X,ρ_c) מרחב מטרי לכל $c>0$ קבוע כאשר

$$\rho_c(x,y)=\begin{cases} d(x,y) & if\ d(x,y)\le c \\ c & if\ d(x,y)>.c \end{cases}.$$

(ו) (X,λ) מרחב מטרי כאשר $\lambda(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$.

5. הוכח שהפונקציות הבאות מגדירות סמימטריקות (semimetric or pseudometric) :

א. ב R^n $\lambda(x,y)=|x_1-y_1|$

ב. ב $C[0,1]$ $\lambda(f,g)=|f(0)-g(0)|$.

ג. ב $C[a,b]$ $\lambda(f,g)=\max\{|f(x)-g(x)|:\ s\le x\le t\}$ ($s\le t$ קבועים)

ד. בקבוצה כלשהי X $\lambda(x,y)=0$.

ה. בקבוצה כלשהי X עבור פונקציה נתונה $f:X\to R$ $\lambda(x,y)=|f(x)-f(y)|$.

ו. בקבוצה $CS(R)$ של סדרות ממשיות מתכנסות $\lambda((x_n),(y_n))=\lim_n|x_n-y_n|$.

6. הוכח או הפרך ש ρ מטריקה מעל קבוצה $C[0,1]$ אם:

$$d(f,g)=\int_0^1(f(x)-g(x))dx$$

$$d(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx$$

$$d(f,g)=\left|\int_0^1(f(x)-g(x))dx\right|$$

7. יהי (X,d) מרחב מטרי. הוכח או הפרך:

א. $diamB[a,r]=2r$

ב. $diam(A\cup B)\le diamA+diamB$

ג. $|d(x,A)-d(y,A)|\le d(x,y)$

(כאשר $diamA:=\sup\{d(x,y)|\quad x,y\in A\}$, $d(x,Y):=\inf\{d(x,y)\,|\,y\in Y\}$)

ד. $B[A,r]$ קבוצה סגורה לכל תת קבוצה A ולכל $r>0$ (כאשר $B[A,r]:=\{x\in X:\quad d(A,x)\le r\}$).

ה. כל תת קבוצה קוסופית היא סגורה.

ו. איחוד של סדרת תת קבוצות סגורות סגור.

8. בקבוצה $\{0,1\}^N=\{(x_1,x_2,\cdots):\quad x_n\in\{0,1\}\}$ של סדרות בינריות (עם "אפסים ואחדים") נגדיר:

$$d((x_n),(y_n)) = \left\{ \begin{matrix} 0 & if \;\; x = y \\ \frac{1}{k(x,y)} & if \;\; k(x,y) := \min\{n : x_n \neq y_n\} \end{matrix} \right\}$$

הוכח ש $([0,1]^N, d)$ מרחב מטרי ותאר את הכדורים $B[z,\frac{2}{9}]$, $B(z,\frac{2}{9})$ כאשר $z = (0,0,\cdots)$.

9. (a-adic metric) לכל מספר טבעי a נתון בקבוצה Z של שלמים נגדיר

$$d_a(x,y) = \left\{ \begin{matrix} 0 & if \;\; x = y \\ \frac{1}{a^{k(x,y)}} & if \;\; k(x,y) = \max\{i : \;\; a^i \mid (x-y)\} \end{matrix} \right\}$$

תאר את הכדורים הבאים $B_{d_5}(0,\frac{2}{5}),\ B_{d5}[0,\frac{1}{5}],\ B_{d_5}(32,\frac{1}{25}),\ B_{d_5}(19,\frac{3}{40})$ במרחב (Z,d_5).

הערה: בתרגילים 8,9 ניתן להוכיח שהמטריקות הן בעצם אולטרא-מטריקות (ultrametric) ז"א מתקיים: $d(x,z) \leq \max\{ d(x,y, d(y,z)\}$

10. (Hamming distance) בקבוצה

$$F(\mathbb{N}) = \{(x_1, x_2, \cdots): \quad x_i \in \{0,1\} \;\; \exists\, k \in \mathbb{N}\; x_i = 0 \;\; \forall\, i > k\}$$

נגדיר

$$d_H(x,y) = \sum_i | x_i - y_i |$$

הוכח ש $(F(N), d_H)$ מרחב מטרי כך שהטופולוגיה שלו היא דיסקרטית. בדוק כי המשמעות של $d_H(x,y)$ היא מספר ההבדלים בין x, y .

11. הגדרה: יהי X מרחב ווקטורי מעל שדה R של ממשיים. פונקציה

$$X \to [0,\infty) \quad x \mapsto \| x \|$$

נקראת *נורמה* אם מתקיים:

(n_1) $\quad \| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0_X$

(n_2) $\quad \| c \cdot x \| = | c | \cdot \| x \|$

(n_3) $\quad \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

הוכח שהפונקציה $d(x,y) := \| x - y \|$ מגדירה מטריקה (הנקראת: *מטריקת הנורמה*) מעל X .

(שימו לב: $\| x \| = d(x, 0_X)$)

12. מצא את הנורמות המתאימות למטריקות בתרגילים 1,2.

13. הוכח שבמרחבים הווקטורים הבאים הפונקציות הנתונות הן נורמות:

א. (סדרות חסומות) $X := \{(x_n): \quad x_n \in R, \; \sup | x_n | < \infty\}$

$$\| (x_n) \| := \sup\{| x_n |: \quad n \in N\}$$

(סימון של מרחב נורמי מתאים : $l_\infty = (X, \| \cdot \|)$)

ב. (פונקציות חסומות מעל קבוצה Y) $X := \{ f : Y \to R: \quad \sup_y | f(y) | < \infty\}$

$$\| f \| := \sup\{| f(y) |: \quad y \in Y\}$$

סימון: $l_\infty(Y)$ או $B(Y,R)$

(שימו לב: (א) זה מקרה פרטי של (ב))

*) הוכח שאם Y קבוצה אינסופית אז קיים שיכון איזומטרי $(R^n, d_{\max}) \to l_\infty(Y)$)

ג. (מרחב הילברט סדרתי)

$$X := \{(x_i): \quad i \in N, x_i \in R, \sum_{i=1}^{\infty} {x_i}^2 < \infty\}$$

$$\| (x_i) \| := \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} {x_i}^2}$$

סימון: l_2.

14. במרחבים l_2, l_∞ מצא:

א. סדרה שלא מתכנסת אבל "מתכנסת רכיב-רכיב".

ב. סדרה של ווקטורים (v_n) ומספר $\varepsilon > 0$ כך ש $\| v_n \| \le 1$ וכל הכדורים $B(v_n, \varepsilon)$ זרים.

15. הוכח שבמרחבים $(Z, d_a), (\{0,1\}^N, d)$ אין נקודות מבודדות. הסק כי לכל איבר z במרחב הנ"ל קיימת סדרה עם איברים שונים אשר שואפת ל z.

16. א. מצא מרחב מטרי (X, d) כך שקיימים כדורים שונים $B(a_1, r_1), B(a_2, r_2)$ המקיימים: $r_1 < r_2$, $B(a_1, r_1) \supset B(a_2, r_2)$.

ב. הוכח שזה לא יתכן במרחב נורמי.

17. נניח שהסדרה $< x_n >$ מתכנסת במרחב מטרי (X, d) ל- a (ז"א כל ε-סביבה של a מכילה כמעט כל האיברים של הסדרה). הוכח:

א. $\{x_n : n \in N\}$ קבוצה חסומה במרחב.

ב. יש רק גבול יחיד.

ג. כל תת סדרה גם מתכנסת (לאותו גבול).

ד. לכל $\varepsilon > 0$ קיים $n \in N$ כך ש $d(x_i, x_j) < \varepsilon$ לכל $i, j > n$.

הערה: סדרה (שלא בהכרח מתכנסת) עם תכונת (ד) נקראת סדרת *קושי*. לכן ע"פ התרגיל סדרה מתכנסת היא תמיד סדרת קושי. אם ההפך גם נכון, ז"א אם כל סדרת קושי ב (X, d) הוא סדרה מתכנסת אזי (X, d) נקרא *מרחב שלם*. הדוגמאות הסטנדרטיות הן:

$R^n \quad l_2 \quad l_{\max} \quad (C[a,b], d_{\max})$

דוגמאות נגדיות:

$(C[a,b], d_1)$

Q, $\{\frac{1}{n}: \quad n \in N\}$ (או "כל מה שלא סגור" במרחב מטרי מסוים)

18. תן דוגמאות של סדרה מתכנסת עם איברים שונים במרחבים הבאים:

א. $(R^2, d_{\max})$.

ב. $(C[a,b], d_{\max})$.

ג. $(C[a,b],d_{\max})$.

ד. l_2 .

ה. l_∞.

ו. (Z,d_5) .

ז. $(\{0,1\}^N,d)$.

מדוע לא קיימת סדרה כזאת במרחב Hamming $(F(N),d_H)$ או ב $\mathbb{N}$?

19. במרחב סמימטרי $(\mathbb{R}^2,\rho_1)$ מצא סדרה עם אינסוף גבולות.

20. יהי (X,d) מרחב סמימטרי. הוכח שהתנאים הבאים שקולים:

א. (X,d) הוא מרחב מטרי.

ב. יש יחידות של גבול.

ג. לכל $a\in X$ מתקיים $\{a\}=\bigcap_{r>0}B(a,r)$.

21. הוכח או הפרך שקיים שיכון איזומטרי במקרים הבאים:

א. $R^n\to R^m$ לכל $n\le m$.

ב. $\{\sqrt{3}-\frac{n}{2n+5}:\ n\in N\}\to Q\cap(2004,\infty)$.

ג. $[1,7]\to[8,10]$

ד. $(Z,d_5)\to(Z,d_9)$

ה. $R^n\to l_2$

ו. $(X,d_\Delta)\to(R^n,d)$ (כאשר $d_\Delta(x,y)=1\Leftrightarrow x\ne y$ $X:=\{a,b,c\}$).

ז. $(X,d_\Delta)\to(C[0,1],d_{\max})$ (כאשר $X:=\{a,b,c\}$).

22. יהי (X,d) מ"מ ו $a\in X$. הוכח שהתנאים הבאים שקולים:

א. a לא מבודדת ב (X,d).

ב. a גבול של סדרה עם איברים שונים ב (X,d) .

23. תרגיל: למצוא מרחבים לא איזומטריים X,Y כך שקיימים שיכונים $Y\to X$ $X\to Y,$.

24.

א. למצוא מ"מ $X=\{A,B,C,D\}$ עם 4 נקודות כך ש X לא איזומטרי לאף תת מרחב מטרי של l_2 (וכמובן גם לא באף מרחב אוקלידי).

ב. כמו בסעיף א אבל בתנאי נוסף ש X משוכן לתוך $(\mathbb{R}^2,d_1)$.

ג. כל מ"מ סופי משוכן לתוך l_∞.

ד. כל מ"מ משוכן לתוך $l_\infty(X)$.

25. (מטריקת Hausdorff) נניח (X,d) מרחב מטרי. תהי $P_{bc}(X,d)$ קבוצה של כל תת קבוצות חסומות וסגורות ב (X,d). נסמן $\mathrm{P}_b(X,d)$ קבוצה של כל תת קבוצות חסומות. נגדיר
$d_*(A,B) := \max\{\sup_{a\in A} d(a,B), \sup_{b\in B} d(b,A)\}$ לכל $\mathrm{A},\mathrm{B} \in P_b(X,d)$

הוכיחו:

א. $(\mathrm{P}_b(X,d),\mathrm{d}_*)$ מרחב פסאודומטרי.

ב. $(\mathrm{P}_{bc}(X,d),\mathrm{d}_*)$ מרחב מטרי.

ג. פונקציה טבעית $\mathrm{i} : \mathrm{X} \to P_{bc}(X,d),\ \mathrm{x} \mapsto \{\mathrm{x}\}$ מגדירה שיכון איזומטרי.

מרחבים טופולוגיים – צעדים ראשוניים

1. לכל מרחב (סמי)מטרי (X,d) נגדיר אוסף $top(d)$ ע"פ
$O \in top(d)$ אם"ם לכל $x \in O$ קיימת ε-סביבה $B(x,\varepsilon) \subseteq O$.
הוכח: $(X,top(d))$ מרחב טופולוגי .

2. ע"י דוגמאות הוכיחו כי ההתאמה

$$METR \to TOP$$
$$(X,d) \mapsto (X,top(d))$$

היא

א. לא חח"ע

ב. לא על

3. הוכח שקבוצה O פתוחה במרחב רגיל R של ממשיים אם"ם לכל $x \in O$ קיימת $\varepsilon > 0$ כך ש
$O \supseteq (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

4. הוכח שהתנאים הבאים שקולים:

א. שהקבוצה X חד-איברית

ב. קיימת רק טופולוגיה אחת מעל X .

5. הוכח שהתנאים הבאים שקולים:

א. (X,τ) הוא מרחב דיסקרטי (ז"א $\tau = P(X)$)

ב. כל נקודה מבודדת ב (X,τ) .

6. הוכח שכל מרחב מטריזבילי הוא מרחב T_2 (ז"א עם תכונת Hausdorff).

7. הוכח שהתנאים הבאים שקולים:
א. (X,τ) הוא מרחב T_1.
ב. כל תת קבוצה חד-איברית סגורה ב (X,τ).

8. תהי X קבוצה סופית. הוכח שאז מ"ט (X,τ) דיסקרטי אם"ם הוא מרחב T_1.

9. מעל קבוצות $X=\{0,1\}, Y=\{a,b,c\}$ מצא את כל הטופולוגיות האפשריות.
כמה מהן לא מכילות נקודות מבודדות ? כמה מהן מטריזביליות ?

10. הוכח שכל אחד מהאוספים הבאים מגדיר טופולוגיה מעל X:
א. $\tau_{discr}=P(X)$ (דיסקרטית)
ב. $\tau_{tr}=\{\varnothing,X\}$ (טריוויאלית)
ג $\tau_{cof}=\{\varnothing, X\setminus F: \quad F \text{ is finite}\}$ (קוסופית)
ד. $\tau_{coc}=\{\varnothing, X\setminus C: \quad C \text{ is countable}\}$ (קו-בת-מנייה)
ה. $\tau_A:=\{U: \quad U=\varnothing \text{ or } A\subset U\}$ (כאשר A תת קבוצה נתונה מראש ב X).

11. א. תהי (X,τ) מרחב T_1. הוכח ש $\tau_{cof}\subset\tau$.
ב. עבור אילו קבוצות X המרחב (X,τ_{cof}) הוא T_2 ? מתי הוא מטריזבילי ?
ג. עבור אילו קבוצות X המרחב (X,τ_{cof}) הוא T_2 ? מתי הוא מטריזבילי ?

12. א. תן דוגמא של מרחב טופולוגי שהוא לא סמימטריזבילי.
ב. תן דוגמא של מרחב טופולוגי שהוא סמימטריזבילי אבל לא מטריזבילי.
ג. הוכח שמרחב סמימטריזבילי הוא מטריזבילי אם"ם הוא T_1.

13. הוכח או הפרך שהאוסף הבא מגדיר טופולוגיה:
א. $X=[0,\infty) \quad \tau=\{\varnothing, X, (a,\infty): \quad a\ge 0\}$
ב. $X=R^2 \quad \tau=\{$כדורים פתוחים רגילים$\}$
ג. $X=\{a,b,c,d\} \quad \tau=\{\varnothing, X,\{a\},\{b\},\{a,c\},\{a,b,c\},\{a,b\}\}$
ד. $X=\{a,b,c,d\} \quad \tau=\{X,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{b,d\},\varnothing\}$
ה. $X=\{a,b,c,d\} \quad \tau=\{X,\varnothing,\{a,c,d\},\{b,c,d\}\}$.
ו. $X=N \quad \tau=\{\varnothing, X, A: \quad$ תת קבוצה אינסופית ב N $A\}$

14. א. במרחב R תנו דוגמה של תת קבוצה שהיא פתוחה, השונה מאינטרוול פתוח, ולא סגורה.
ב. במרחב R תנו דוגמה של תת קבוצה שהיא סגורה, חסומה, השונה מקטע סגור ולא פתוחה.
ג. במרחב R תנו דוגמה של תת קבוצה שהיא לא סגורה ולא פתוחה.
ד. במרחב R תנו דוגמה של תת קבוצה שהיא *סגוחה* (ז"א סגורה וגם פתוחה).

15. א. תנו דוגמא של מרחב טופולוגי וסדרת קבוצות פתוחות בו כך שהחיתוך של הסדרה הוא לא פתוח.
ב. תנו דוגמא של מרחב טופולוגי וסדרת קבוצות סגורות בו כך שהאיחוד של הסדרה הוא לא סגור.

16. (תת מרחב טופולוגי) יהי (X,τ) מ"ט ו Y תת קבוצה.
נגדיר ,"טופולוגית תת מרחב" ע"י
$$\tau_Y = \{O \cap Y: \quad O \in \tau\}$$
הוכח ש (Y, τ_Y) מ"ט.

מרחבים טופולוגיים

1. הוכח שלכל מ"מ (X,d) קיימת מטריקה חסומה מעל X כך ש $d \overset{top}{\sim} \rho$
(ז"א $top(d) = top(\rho)$).

2. הוכח כי התנאים הבאים שקולים :
א. $top(d) \supseteq top(\rho)$
ב. $x_n \xrightarrow{d} a \Rightarrow x_n \xrightarrow{\rho} a$
הסק כי $d \overset{top}{\sim} \rho$ אם ורק אם יש אותה התכנסות במובן d או ρ.

3. נניח $C[a,b]$ מרחב וקטורי של פונקציות רציפות ממשיות מעל קטע סגור $[a,b]$.
נגדיר 2 מטריקות טבעיות:
$$d_{\max}(f,h) := \max\{|f(x) - h(x)|: x \in [a,b]\}$$
$$d_1(f,h) := \int_a^b |f(x) - h(x)|\,dx$$
הוכח :
א. $d_1 \le (b-a)d_{\max}$
ב. $top(d_1) \subset top(d_{\max})$
ג. $top(d_1) \neq top(d_{\max})$

4. (אקסיומות הפרדה) מרחב טופולוגי (X,τ) נקרא בעל תכונת
א. T_0 אם לכל 2 נקודות זרות $a,b \in X$ קיימות סביבות $U \in N(a), V \in N(b)$ כך ש
$a \notin V$ או $b \notin U$.
ב. T_1 אם לכל 2 נקודות זרות $a,b \in X$ קיימות סביבות $U \in N(a), V \in N(b)$ כך ש
$a \notin V$ ו $b \notin U$.
ג. T_2 אם לכל 2 נקודות זרות $a,b \in X$ קיימות סביבות זרות.

הוכח: $TOP \supset T_0 \supset T_1 \supset T_2 \supset Metr$.
תן דוגמאות נגדיות מתאימות.

5. נסח הגדרת סדרה מתכנסת במ"ט (X,τ). הוכח שבמרחב T_2 (אומרים גם Hausdorff) יש יחידות גבולות. תן דוגמא של מ"ט T_1 שבו לסדרה אחת יש אינסוף גבולות.

6. הוכח שהתנאים הבאים שקולים:
א. $(X,\tau)\in T_1$
ב. $cl\{a\}=\{a\}$ לכל $a\in X$.
ג. כל תת קבוצה סופית סגורה ב (X,τ).

7. נניח (X,τ) מ"ט ו- $\varnothing\neq Y\subseteq X$. נגדיר "טופולוגית תת-מרחב"
$$\tau_Y := \{O\cap X:\quad O\in\tau\}$$
הוכח:
א. (Y,τ_Y) גם מ"ט.
ב. אם γ בסיס של (X,τ) אזי $\gamma_Y := \{A\cap Y:\quad A\in\gamma\}$ בסיס של (Y,τ_Y).
ג. תכונות הבאות הן תורשתיות: קיום בסיס בן מנייה (אומרים "תכונת מנייה שנייה"), קיום בסיס בן מנייה לוקלי עבור כל נקודה, (אומרים "תכונת מנייה ראשונה"), תכונות $i\in\{0,1,2\}$ T_i, מטריזביליות.

8. האם המרחב הבא הוא מטריזבילי (לנמק):
א. מרחב דיסקרטי
ב. $X=\{a,b\}$ עם טופולוגית סרפינסקי $\tau:=\{\varnothing,X,\{a\}\}$
ג. $X:=Z$ $\tau:=\{\varnothing,X,\{x\in Z\mid\quad x\le n\}\mid\quad n\in Z\}\}$
ד. טופולוגיה טריוויאלית.
ה. טופולוגיה קוסופית מעל $X:=Z$.
ו. טופולוגיה קומנייה מעל $X:=Z$.
ז. מרחב נורמי.

9. נניח $\le$ סדר חלקי בקבוצה X. נגדיר ("טופולוגית סדר חלקי") $\tau_\le$ מעל X ע"פ התנאי:
$$O\in\tau_\le \equiv x\in O\Rightarrow \underline{x}\subseteq O$$
כאשר $\underline{x}:=\{y\in X\mid\quad y\le x\}$.
א. הוכח ש $(X,\tau_\le)$ מ"ט והיתוך של אינסוף קבוצות פתוחות גם פתוח.
ב. הוכח שתמיד $(X,\tau_\le)\in T_0$. מתי $(X,\tau_\le)\in T_1$?
ג. נניח $X:=\{5,6,\cdots,43\}$ עם סדר $a\le b \quad\Leftrightarrow\quad a\mid b$. במ"ט $(X,\tau_\le)$ מצא $\operatorname{int}(A), cl(A), \partial(A)$ עבור $A:=\{11,15,17,43\},\quad A:=\{10,12,21\}$.

10. מצא את כל הטופולוגיות האפשריות מעל הקבוצות הבאות:
א. $X=\{a,b\}$
ב. $X=\{a,b,c\}$ בתנאי ש- a,c לא מבודדות.
ד. כמה מהטופולוגיות הנ"ל הן מטריזביליות.

11. (הישר של *Sorgenfrey*)

מעל קבוצה R של ממשיים נגדיר "טופולוגית Sorgenfrey " τ_S ע"י הכלל:

$O \in \tau_S$ אם ורק אם מתקיים התנאי

$x \in O \Rightarrow \exists\, a < b: \quad x \in [a,b) \subset O$.

הוכח ש (R, τ_S) מרחב טופולוגי עם התכונות הבאות :

א. $\alpha = \{[a,b\} : \quad a,b \in R\}$ בסיס טופולוגי.

ב. טופולוגיה סטנדרטית τ של R חלשה ממש מטופולוגית Sorgenfrey τ_S .

ג. T_2

ד. C_I

ה. $\notin C_{II}$

עוד תרגילים

1. יהי (X,d) מ"מ. הוכח:

א. קבוצות סופיות, $B[a,r], S[a,r]$, $B[a,r_1] \setminus B(b,r_2)$ תמיד סגורות.

ב. לכל $X \supseteq A \neq \varnothing$ "הכדור" $B(A,r) := \{x \in X \mid \quad d(A,x) < r\}$ פתוח.

2. הוכח שבכל מרחב נורמי מתקיים $cl(B(a,r) = B[a,r]$, $\partial(B(a,r) = S[a,r]$. תן דוגמא נגדית עבור מרחב מטרי.

3. הוכח שאם X מרחב מטריזבילי אז כל תת קבוצה סגורה A היא חיתוך של סדרת תת קבוצות פתוחות (אומרים: A קבוצה מסוג G_δ). הוכח גם שכל תת קבוצה פתוחה O היא איחוד של סדרת תת קבוצות סגורות (אומרים: O מסוג F_σ).

4. הוכח:

א. $A := \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n \mid \quad x_1 = 0\}$ סגורה ב R^n ו- $\operatorname{int}(A) = \varnothing$ (לכן A קבוצה דלילה ב X).

ב. $A := \{< x_n > \in l_2 \mid \quad x_1 = 0\}$ סגורה ב l_2 ו- $\operatorname{int}(A) = \varnothing$.

5. הוכח ש A סגוחה במרחב X אם"ם $\partial(A) = \varnothing$.

6. נאמר שהמרחב X הוא בעל ממד 0 (ונסמן $\dim X = 0$) אם קיים בסיס לטופולוגיה כך שכל איבר של הבסיס הוא תת קבוצה סגוחה של X . הוכח שכל מרחב הבא הוא בעל ממד 0 :

מרחב Hamming (R, τ_s), (Z, d_5), (X, τ_{discr}), $Q, R \setminus Q$.

7. הוכח שבמרחב (R,τ_{coc}) מתקיים $cl(A)=R\neq[0,1]=scl(A)$ עבור $A:=[0,1]$. הסק ש (R,τ_{coc}) לא מטריזבילי.

8. הוכח שמרחבים הבאים הם ספרביליים: $R^n, l_2, (X,\tau_{cof}), (R,\tau_s)$.

9. תן דוגמאות של מרחב מטרי לא ספרבילי.

10. תן דוגמא של מרחב X ספרבילי עם תת מרחב Y לא ספרבילי.
הסבר מדוע X בהכרח לא מטריזבילי ?

רציפות

1. הוכח כי פונקציה רציפה שומרת על התכנסות סדרות (תנאי הכרחי).
האם זה גם תנאי מספיק לרציפות ?

2. הוכח: פונקציה $1_R:(R,\tau_s)\to R$ רציפה אבל $1_R:R\to(R,\tau_s)$ לא רציפה.

3. הוכח:
(א) כל מישור סגור ב R^3.
(ב) $A=\{(x,y,z)\mid\ 2x^2+3y^3z-7xz<5\ \&\ xy\neq1\}$ פתוחה ב R^3.
(ג) $A=\{(x,y,z)\mid\ xy-z=7\ \ or\ \ x^2+4yz^6\leq17\}$ סגורה ב R^3.
(ד) $\{x\in X\mid\ 1\leq\|x\|\leq4\}$ סגורה בכל מרחב נורמי $(X,\|\cdot\|)$.
(ה) $GL_n(R)=$\{מטריצות ממשיות הפיכות $n\times n$\} פתוחה במרחב נורמי $Mat_n(R)$
(לגבי הנורמה $\|(a_{ij})\|:=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a^2{}_{ij}}$).

4. הוכח שבמרחב מטריזבילי (X,τ) התנאים הבאים שקולים:
(א) A תת-קבוצה סגורה.
(ב) A "קבוצת אפסים" (ז"א קיימת פונקציה רציפה $h:X\to R$ כך ש $A=h^{-1}(0)$.

5.
א. נניח $f:X\to R$ פונקציה מעל מ"מ (X,d). הוכח ש f רציפה בנקודה $a\in X$ אם ורק אם $osc_f(a)=0$.
(כאשר **התנודה** (oscillation) של f בנקודה a מוגדרת כך:
$osc_f(a):=\lim diamf(B(a,\frac{1}{n}))$)

ב. נניח $f,g:X\to R$ פונקציות רציפות מעל מ"ט X. הוכח שגם $f+g,\quad cf,\quad f\cdot g$ רציפות.
הסק כי $C([0,1],R)$ תת מרחב ווקטורי (וגם תת חוג !) של $B([0,1],R)$.

6.
(א) יהיו $(X,\tau),(Y,\sigma)$ מ"ט, γ בסיס של σ.
הוכח ש $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ רציפה אם ורק אם $f^{-1}(O)\in\tau$ לכל $O\in\gamma$.
(ג) הוכח ש (א) עדיין נכון אם $\gamma=\{A_i\}_{i\in I}$ רק **תת-בסיס** (ז"א האוסף $\gamma^{\cap finite}:=\{\bigcap_{j\in J}A_j \mid$ J תת-קבוצה סופית של $I\}$ אשר מתקבל מ γ ע"י חיתוכים סופיים הוא בסיס של σ).
(ג) הסק בעזרת (ב) שפונקציה $f:(X,\tau)\to R$ רציפה אם ורק אם $f^{-1}(-\infty,b),\ f^{-1}(a,\infty)$ פתוחות לכל $a,b\in R$.

7. (Extension of identities) נניח $f,g:X\to Y$ פונקציות רציפות ו $Y\in T_2$ (תכונת Hausdorff).
נניח גם שקיימת תת קבוצה צפופה A ב X
(ז"א $cl(A)=X$) כך ש $f(a)=g(a)$ לכל $a\in A$. הוכח:
א. $D:=\{x\in X \mid f(x)=g(x)\}$ צפופה ב X.
ב. הוכח ש $f=g$.

8. (א) הוכח ש (X,τ) דיסקרטי אם ורק אם כל פונקציה $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ רציפה לכל מ"ט (Y,σ).
(ב) הוכח ש (X,τ) טריוויאלי אם ורק אם כל פונקציה $f:(Y,\sigma)\to(X,\tau)$ רציפה לכל מ"ט (Y,σ).

9. יהי $f:X\to Y$ הומיאומורפיזם (ז"א פונקציה הפיכה כך ש $f,\ f^{-1}$ רציפות). הוכח:
(א) f פונקציה סגורה (ז"א תמונה של קב' סגורה היא קב' סגורה).
(ב) f פונקציה פתוחה (ז"א תמונה של קב' פתוחה היא קב' פתוחה).
(ג) $f(cl(A))=cl(f(A)),\quad f(\text{int}(A))=\text{int}(f(A))$.

10. הוכח או הפרך:
(א)) $R\setminus Q\cong Q$
(ב) $N\cong\{\frac{n}{n+1}\}_{n\in N}$
(ג) $[3,\infty)\cong(-\infty,5]$
(ד) $(2,5)\cup(7,8)\cong(-3,-1)$
(ה) $(2,5)\cup(7,8)\cong(-3,-1)\cup\{0\}$
(ו) $[3,\infty)\cong[5,9]$
(ז) $[3,\infty)\cong(5,\infty)$
(ח) $X\cong S_1$ כאשר $X=$ תת-מרחב של R^2 בצורת **8**, $S_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$.

11. הוכח:

(א) $(1,3)\times[5,6]\cong[1,4]\times(2,\infty)$
(ב) $(0,2)\times(0,2)\cong B_d((1,0),5)$
(ג) $Gr_f\cong R^n$ עבור כל פונקציה רציפה $f:R^n\to R^m$
(הגרף $Gr_f=\{(x,y)\in R^n\times R^m \mid y=f(x)\}$)

12
א. הוכח שהרכבה של פונקציות ליפשיץ היא פונקצית ליפשיץ.
ב. הוכח שהרכבה של פונקציות רציפות היא פונקציה רציפה (בין מרחבים טופולוגיים).
ג. הוכח שהרכבה של פונקציות רציפות במ"ש היא פונקציה רציפה במ"ש.

13. הוכח שהפונקציות הבאות הן פונקציות ליפשיץ:
א. $\pi_2:R^3\to R,\quad \pi_2(x)=x_2$
ב. $\pi_i:R^n\to R,\quad \pi_i(x)=x_i$
ג. $\pi_i:l_2\to R,\quad \pi_i(x)=x_i$
ד. $I:(C[a,b],d_{\max})\to(C[a,b],d_1)\quad I(f)=f$.
ה. $x\mapsto\|x\|\quad X\to[0,\infty)$ לכל מרחב נורמי $(X,\|\cdot\|)$.
ו. כפל בסקלר $M_c:X\to X$ לכל מרחב נורמי $(X,\|\cdot\|)$.
ז. $f_A(x)=d(x,A)\quad f_A:X\to R$ לכל מרחב מטרי (X,d) ותת קבוצה לא ריקה A.
ח. כל אופרטור לינארי בין מרחבים מימד סופי .
ט. שיכון איזומטרי.
י. $f:R\to R$ הנגזרת f' קיימת והיא פונקציה חסומה (רמז: משפט Lagrange על הממוצע) .

14. תהי $A\subseteq X$ תת קבוצה של מ"ט X ותהי $\lambda_A:X\to R$ **הפונקציה האופיינית** של A (ז"א $\lambda_A(x)=1$ אם ורק אם $x\in A$, ו $\lambda_A(x)=0$ אחרת).
א. הוכח ש λ_A רציפה בנקודה $x\in X$ אם ורק אם $x\notin\partial(A)$.
ב. הוכח ש λ_A רציפה אם ורק אם A סגוחה ב X .
ג. תן דוגמא של פונקציה $f:R^n\to R^n$ שלא רציפה באף נקודה .

15. הוכח שאם A תת קבוצה **קמורה**
(ז"א, $(1-t)x+ty\in A\quad \forall x,y\in A, \forall t\in[0,1]:$)
במרחב נורמי X אז A מרחב קשור.

16. הוכח שאם X מרחב טופולוגי ספרבילי (ז"א קיימת תת-קבוצה בת-מנייה צפופה ב X)
ו $f:X\to Y$ רציפה ועל אז גם Y ספרבילי.

17. (א) נניח τ,σ טופולוגיות מעל אותה קבוצה X. הוכח ש $\tau\supseteq\sigma$ אם ורק אם $1_X:(X,\tau)\to(X,\sigma)$ רציפה.
(ב) נניח ρ,d מטריקות מעל אותה קבוצה X. הוכח ש $\rho\overset{L}{\sim}d$ אם ורק אם $1_X:(X,d)\to(X,\rho)$ וגם $1_X:(X,\rho)\to(X,d)$ פונקציות ליפשיץ.
(ג) נניח ρ,d מטריקות מעל אותה קבוצה X. הוכח שהתנאים שקולים:

1 $\rho \overset{t}{\sim} d$

2 $1_X : (X,d) \to (X,\rho)$ וגם $1_X : (X,\rho) \to (X,d)$ פונקציות רציפות.

3 לכל $a \in X$ $\varepsilon > 0$ קיימים $\alpha, \delta > 0$ כך ש

$B_d(a,\alpha) \subseteq B_\rho(a,\varepsilon) \quad \& \quad B_\rho(a,\delta) \subseteq B_d(a,\varepsilon)$.

18. תן דוגמא של פונקציה רציפה חח"ע ועל $f : [0,1) \to T$ כך שהיא לא הומאומורפיזם.