28.02.2016

כמה עובדות מתורת הקבוצות

1. כללי de Morgan

א. $X \setminus (\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} (X \setminus A_i)$ ב. $X \setminus (\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} (X \setminus A_i)$

2. א. $A \cap \bigcup_{i\in I} C_i = \bigcup_{i\in I} (A \cap C_i)$ ב. $A \cup \bigcap_{i\in I} C_i = \bigcap_{i\in I} (A \cup C_i)$

הגדרה: לכל פונקציה $f : X \to Y$

$A \subseteq X, B \subseteq Y$ $f(A) := \{f(a) : a \in A\}, \quad f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$

3.

א. $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$

ב. $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$

ג. $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$

ד. $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i)$

ה. $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ (אם f חח"ע אז שווה).

ו. $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$.

ז. $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ (אם f על אז שווה).

ח. $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$

$f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$

$f(A_1) \setminus f(A_2) \subseteq f(A_1 \setminus A_2)$

ט. $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$

י. $f(X \setminus f^{-1}(B)) = f(X) \setminus B$

- **הגדרה:** פונקציה $f : X \to Y$ נקראת

א. **על** אם $f(X) = Y$

ב. **חד חד ערכית** אם $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

ג. **הפיכה** אם היא על וגם חח"ע.

- קבוצות X, Y בעלות אותה עוצמה אם קיימת פונקציה הפיכה $f: X \to Y$
(סימון: $|X| = |Y|$ **או** $card(X) = card(Y)$**).**
- $|X| \le |Y|$ אם"ם קיימת פונקציה על $Y \to X$ אם"ם קיימת פונקציה חח"ע $X \to Y$.
- תמיד $|X| < |P(X)| = 2^{|X|}$.

- הגדרה: X *בת מנייה* אם $|X| = |\mathbb{N} := \{1, 2, \cdots\}|$ או אם X קבוצה סופית.
שקול: קיימת פונקציה על $\mathbb{N} \to X$. סימון: $|X| \le \aleph_0$.
נשמרת על ידי פעולות טבעיות: תמונה, איחוד בן מנייה, מכפלה של מספר סופי של גורמים.
דוגמה: $|\mathbb{Q}^5| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$.
- $2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}| = |P(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$. לכן $\mathbb{R}$ לא בת מנייה.
- $\forall \lambda \ge \aleph_0 \qquad \lambda + \lambda = \lambda \cdot \lambda = \lambda$

הגדרה: אוסף F לא ריק של קבוצות לא ריקות בתוך קבוצה X נקרא *פילטר* או *מסנן* אם :

א. $A \in F, A \subseteq B \Rightarrow B \in F$

ב. $A, B \in F \Rightarrow A \cap B \in F$

הגדרה: תת אוסף M של פילטר F נקרא *בסיס* של F אם

לכל $B \in F$ קיים $A \in M$ כך ש $A \subseteq B$.