משפט טיכונוף (1935) Tychonoff Theorem

נניח $X=\prod_{i\in I} X_i$ מכפלה טופולוגית. אזי X קומפקטי אם ורק אם כל X_i הוא מרחב קומפקטי.

ההוכחה מבוססת על הספר S. Lipschutz General Topology

והקישורים: http://en.wikipedia.org/wiki/Tychonoff_theorem
https://en.wikipedia.org/wiki/Subbase

לשאלות megereli@math.biu.ac.il מיכאל מגרל.

הוכחה:

(כוון אחד)

אם X קומפקטי אז כל X_i היא גם קומפקטי כתמונה רציפה של X לגבי העתקת ההטלה: $\pi_i : X \to X_i$.

(כוון שני)

נוכיח בשתי דרכים:

דרך א. בעזרת קריטריון קומפקטיות Alexander (דרך תת בסיס).

דרך ב. בעזרת קריטריון קומפקטיות דרך FIP (תכונת החיתוך הסופי).

דרך א.

קריטריון קומפקטיות Alexander :

נניח X מרחב טופולוגי ו β תת בסיס של הטופולוגיה. אזי X קומפקטי אם ורק אם לכל כיסוי $C\subset\beta$ של X (דרך איברים של β) קיים תת כיסוי סופי.

הוכחה של הקריטריון:

כיוון אחד ברור (הגדרה של הקומפקטיות).

כיוון שני: נניח מ"ט X ותת בסיס שלו β מקיימים את התנאי של Alexander.

צ"ל ש X קומפקטי. נניח בשלילה שלא. אז קיים כיסוי פתוח C של X ללא תת כיסוי סופי.

נקרא לכיסוי פתוח "בעייתי" אם אין תת כיסוי סופי.
בה"כ ניתן להניח ש C הוא כיסוי בעייתי *מכסימלי*.
הערה: *מכסימליות* פירוש הדבר – אין גדול ממנו (ולא בהכרח הכי גדול) ז"א כל כיסוי פתוח של X המכיל את C ושונה ממנו הוא לא בעייתי.
<u>הסבר:</u> הקיום של כיסוי כזה מצריך שימוש בלמה של צורן.
שימו לב שאם נתון שרשרת של כיסויים בעייתים אזי האיחוד הוא גם בעייתי.

בגלל המכסימליות של C הוא מקיים את התכונה הבאה:
(*) אם O קבוצה פתוחה שלא שייכת ל C אז $C \cup \{O\}$ לא בעייתי ולכן קיים תת אוסף סופי C_0 של C כך ש $C_0 \cup \{O\}$ מכסה את X.

האוסף $C \cap \beta$ הוא לא מכסה את X
(אחרת תנאי של Alexander גורר ש C לא בעייתי).
לכן קיימת נקודה $z \in X$ כך ש z לא מכוסה ע"י $C \cap \beta$.
קיים $U \in C$ כך ש $z \in U$ (כי C כיסוי).
לפי הגדרת תת בסיס ($\beta^{\cap F}$ הוא בסיס) קיימים מספר סופי של איברים
$S_1, \cdots, S_n \in \beta$ כך ש $z \in \bigcap_{i=1}^{n} S_i \subset U$.
אף $S_1, \cdots, S_n$ לא שייך ל C (כי אחרת $C \cap \beta$ מכסה את z).
לכן ע"פ תכונת (*) הנ"ל לכל $1 \le i \le n$ קיים תת אוסף סופי C_i כך ש $C_i \cup \{S_i\}$ מכסה את X.
נסמן: $G_i := \cup\{A : A \in C_i\}$. אז $S_i \cup G_i = X$ ונקבל

$$U \cup (\bigcup_{i=1}^{n} G_i) \supseteq (\bigcap_{i=1}^{n} S_i) \cup (\bigcup_{i=1}^{n} G_i) \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} (S_i \cup G_i) = X$$

ז"א תת אוסף סופי $\bigcup_{i=1}^{n} C_i \cup \{U\}$ של C מכסה את X. סתירה !
זה מוכיח את הקריטריון.

בעזרתו נוכיח כיוון שני של משפט טיכונוב.
בתפקיד של תת בסיס β ב $X = \prod_{i \in I} X_i$ ניקח תיבות אלמנטריות (צילינדרים) המקורות של קבוצות פתוחות מכל גורם X_i. נניח בשלילה ש X לא קומפקטי. אז לפי משפט Alexander קיים תת אוסף C של β כך ש C הוא כיסוי בעייתי של X. נציג אותו $C = \bigcup C_i$ כאשר כל C_i מורכב מתיבות אלמנטריות שבאות מגורם X_i. ע"פ ההנחה C_i לא מכיל תת כיסוי סופי של X. אזי $\pi_i(C_i)$ לא מכיל תת כיסוי סופי של X_i. אבל X_i קומפקטי לכן $\pi_i(C_i)$ הוא לא כיסוי שלו. קיימת נקודה $x_i \in X_i$ שלא מכוסה ע"י $\pi_i(C_i)$. אזי הנקודה $x := (x_i) \in \prod_{i \in I} X_i$ לא מכוסה ע"י C. סתירה ! מכאן מש"ל. ☺

דרך ב. בעזרת קריטריון קומפקטיות דרך FIP (תכונת החיתוך הסופי).

צ"ל ש X קומפקטי בהנחה שכל X_i קומפקטי.

נניח $\alpha := \{F_i : i \in I\}$ אוסף תת קבוצות סגורות ב X המקיים FIP (תכונת החיתוך הסופי).

ע"פ קריטריון הקומפקטיות מספיק להוכיח ש $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \varnothing$.

<u>טענת עזר</u> 1 : קיים אוסף M של תת קבוצות ב X כך ש:

א. הוא מקיים FIP.

ב. מכיל את $\alpha := \{F_i : i \in I\}$.

ג. מכסימלי בין כל האוספים ב X המקיימים 2 תנאים הנ"ל: א & ב.
(הערה: מכסימליות פירוש הדבר – אין גדול ממנו ולא בהכרח הכי גדול-- ז"א כל אוסף תת קבוצות ב X המכיל את M והמקיים FIP שווה ל M.)

<u>הסבר:</u> שימוש בלמה של צורן.
שימו לב שאם נתון שרשרת של אוספים ב X עם התכונות א & ב אזי האיחוד של האוספים הוא גם מקיים את התנאים א & ב.

<u>טענת עזר 2</u>: האוסף M מטענה 1 מקיים:

i. $A \in M \wedge A \subseteq B \Rightarrow B \in M$.

ii. M סגור לגבי חיתוכים סופיים (ז"א $M^{\cap f} = M$).

iii. $B \cap A \neq \varnothing \quad \forall A \in M \quad \Rightarrow B \in M$.

<u>הסבר:</u> נוכיח למשל ii. בדיקת התכונות i & iii באופן דומה.

(ii) מספיק להוכיח לשני גורמים. ז"א מספיק לבדוק ש $\forall A, B \in M \quad A \cap B \in M$.

נסמן $M_+ := M \cup \{C\} \quad C := A \cap B$.

בגלל תכונת המכסימליות של M מספיק לבדוק ש $M_+ := M \cup \{C\}$ מקיים FIP.

צ"ל $\forall A_1, \cdots, A_n \in M \quad A_1 \cap \cdots \cap A_n \neq \varnothing$.

בבדיקה יש 2 מקרים:

I אף אחד מהאיברים $A_1, \cdots, A_n$ הם לא שווים C. אז משתמשים בתכונת FIP של M.

II שאחד מהאיברים $A_1, \cdots, A_n$ הם שווים C. בה"כ נניח $C = A_1$.

אז חשוב להיזכר ש $C = A \cap B \qquad A, B, A_2, \cdots, A_n \in M$

ושוב להפעיל תכונת FIP של M.

בשני מקרים הנ"ל נקבל שבאמת $M_+ := M \cup \{C\}$ מקיים FIP.

המשך הוכחת המשפט:

נבחר אוסף M שמקיים טענות 1 ו 2.

נגדיר $\overline{M} := \{\overline{A} : A \in M\}$.

ברור ש $\alpha \supseteq \overline{M}$ לכן מספיק להוכיח שקיימת נקודה משותפת $\exists p \in \bigcap\{\overline{A}: \quad A \in M\}$.

שקול (בגלל הגדרת נקודת הסגור):

קיימת נקודה $\exists p \in X$ כך שכל תיבה בסיסית U (בהגדרת טופולוגית טיכונוף) שמכילה את הנקודה p פוגשת את כל האיברים של M.

ז"א

$$U \cap A \neq \varnothing \quad \forall A \in M.$$

רעיון טבעי: *לבנות נקודה p לפי הקאורדינטות שלה.*

אוסף M הוא מקיים FIP לכן גם

$$\pi_i(M) = \{\pi_i(A): \quad A \in M\}$$

הוא מקיים FIP לכל $i \in I$. אזי האוסף

$$\overline{\pi_i(M)} = \{\overline{\pi_i(A)}: \quad A \in M\}$$

הוא אוסף עם תכונת FIP בעל קבוצות סגורות במרחב קומפקטי X_i. לכן קיימת נקודה

$$p_i \in \cap\{\overline{\pi_i(A)}: \quad A \in M\} \subset X_i.$$

נגדיר נקודה

$$p := (p_i)_{i \in I} \in X$$

ונוכיח שזאת הנקודה שאנחנו מחפשים.

נניח $p \in U = \pi_{i_1}^{-1}(G_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(G_{i_n})$ סביבה בסיסית

כאשר G_{i_k} פתוחה ב X_{i_k} לכל $k \in \{1, \cdots, n\}$.

אזי $p_{i_k} \in G_{i_k}$ ו $G_{i_k} \cap \pi_{i_k}(A) \neq \varnothing \quad \forall A \in M$.

מכאן $\pi_{i_k}^{-1}(G_{i_k}) \cap A \neq \varnothing \quad \forall A \in M$

[כי תמיד $f(K \cap f^{-1}(P)) = f(K) \cap P$]

בגלל תכונה (iii) מטענה 2 נקבל $\pi_{i_k}^{-1}(G_{i_k}) \in M$.

בגלל תכונה (ii) מטענה 2 נקבל $U = \pi_{i_1}^{-1}(G_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(G_{i_n}) \in M$.

בגלל תכונה א מטענה 1 נקבל $U \cap A \neq \varnothing \quad \forall A \in M$

וזה מה שהיה צריך להוכיח.

☺

דרך ג.

<u>הערה</u>: הוכחה נוספת שמבוססת על המושג *מסנן* (Filter)
ניתן למצוא בספר *טופולוגיה קבוצתית*, האוניברסיטה הפתוחה (ד. לייבוביץ).