הוכחה חדשה של משפט לופיטל במקרה $\frac{\infty}{\infty}$

בועז צבאן

14 בינואר 2019

1 המשפט

יהיו $-\infty \le a, b \le \infty$. יהיו f, g פונקציות המוגדרות בסביבה של a, כך ש $g'(x) \neq 0$ בסביבה זו.

אם $f(x), g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \infty$ והגבול $b := \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים, אז גם $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b$.

עבור נקודה ממשית a, המשפט נכון גם עבור גבול מימין ומשמאל בנקודה a.

הערה: בהוכחת המשפט, לא נשתמש בנתון $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \infty$. המשפט תקף גם ללא נתון זה.

2 טענות עזר קלות

למה 2.1 יהי $-\infty \le a \le \infty$.

$a_n \longrightarrow a \iff$ לכל תת־סידרה (b_n) של (a_n) יש תת־סידרה (c_n) של (b_n) כך ש $c_n \longrightarrow a$. (במילים: לכל תת־סידרה של (a_n) יש תת־סידרה ששואפת ל a.)

הוכחה: $(\Leftarrow)$ מיידי: כל תת־סידרה של תת־סידרה היא בעצמה תת־סידרה של הסידרה המקורית, ולכן גם היא שואפת ל a.

$(\Rightarrow)$ בדרך השלילה, נניח $a_n \not\longrightarrow a$. אז יש סביבה U של a שאינסוף איברים מהסידרה לא נמצאים בה. תהי (b_n) התת־סידרה של (a_n) המורכבת מהאיברים שלא שייכים לסביבה U. לכל תת־סידרה (c_n) של (b_n), כל האיברים c_n הם מחוץ לסביבה U, ולכן $c_n \not\longrightarrow a$. סתירה לנתון. ■

למה 2.2 $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b \iff$ לכל סידרה $a \neq x_n \longrightarrow a$, יש תת־סידרה (z_n) המקיימת $f(z_n) \longrightarrow b$.

(במילים אחרות, לכל סידרה $a \neq x_n \longrightarrow a$, לסידרה $(f(x_n))$ יש תת־סידרה השואפת ל b.)

הוכחה: $(\Leftarrow)$ מיידי, שכן $f(x_n) \longrightarrow b$.

$(\Rightarrow)$ תהי $a \neq x_n \longrightarrow a$. מהלמה הקודמת, כדי להוכיח $f(x_n) \longrightarrow b$ מספיק להוכיח שלכל תת־סידרה $(f(t_n))$ של $(f(x_n))$ יש תת־סידרה $(f(z_n))$ השואפת ל b.

ואכן, לכל תת־סידרה $(f(t_n))$ של $(f(x_n))$, גם $a \neq t_n \longrightarrow a$, ולכן מהנתון יש תת־סידרה (z_n) של (t_n) המקיימת $f(z_n) \longrightarrow b$. ■

הלמה הראשונה לא באמת נחוצה עבור הלמה השניה. אפשר להוכיח את הלמה השניה, שהיא מה שאנו צריכים, ישירות. אבל ההוכחות כל כך קלות, שניצלנו את ההזדמנות להכיר גם את הלמה הראשונה, ואז, למה לא להיעזר בה בהוכחת הלמה השניה?

3 הוכחת המשפט

נתון שיש סביבה ימנית של הנקודה a שבה $g'(x) \neq 0$. ממשפט רול, לפונקציה g יש לכל היותר נקודת אפס יחידה בסביבה, ולכן על ידי הקטנת הסביבה, אפשר להניח שגם $g(x) \neq 0$ בסביבה זו. כל סידרה $x_n \longrightarrow a^+$ נמצאת לבסוף בסביבה זו, ולכן נתייחס רק לסדרות בסביבה.

תהי $x_n \longrightarrow a^+$. נוכיח שיש תת־סידרה (z_n) של (x_n) המקיימת $\frac{f(z_n)}{g(z_n)} \longrightarrow b$. מלמה 2 ינבע ש $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$.

נקבע סידרת עזר $a_n \to a^+$. יהי n מספר טבעי קבוע כלשהו. לכמעט כל מספר טבעי k מתקיים:

1. $x_k < a_n$ (כי $x_k \longrightarrow a < a_n$).
2. $\frac{1}{n} > \left|\frac{g(a_n)}{g(x_k)}\right|, \left|\frac{f(a_n)}{g(x_k)}\right|$, ובפרט $g(x_k) \neq g(a_n)$ (כי $g(x_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ ו n קבוע).

לכן, נוכל לבחור תת־סידרה $(x_{m_n})_{n=1}^{\infty}$ בצורה הבאה. נסמן $m_0 := 1$. לכל $n \geq 1$, נבחר $k > m_{n-1}$ המקיים את שני התנאים לעיל, וניקח $m_n := k$.

לשם קיצור, נכתוב z_n במקום x_{m_n}. אז (z_n) תת־סידרה של (x_n) המקיימת, לכל n טבעי:

1. $z_n < a_n$.
2. $\frac{1}{n} > \left|\frac{g(a_n)}{g(z_n)}\right|, \left|\frac{f(a_n)}{g(z_n)}\right|$, ובפרט $g(z_n) \neq g(a_n)$ ומתקיים $\frac{f(a_n)}{g(z_n)}, \frac{g(a_n)}{g(z_n)} \longrightarrow 0$.

ממשפט הערך הממוצע המוכלל, לכל n יש נקודה $z_n < c_n < a_n$ שעבורה

$$\frac{\frac{f(z_n)}{g(z_n)} - \frac{f(a_n)}{g(z_n)}}{1 - \frac{g(a_n)}{g(z_n)}} = \frac{f(z_n) - f(a_n)}{g(z_n) - g(a_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \longrightarrow b.$$

הגבול הוא b משום ש $c_n \longrightarrow a^+$, ואפשר להשתמש בנתון לגבי הגבול של מנת הנגזרות. כיון ש $\frac{f(a_n)}{g(z_n)}, \frac{g(a_n)}{g(z_n)} \longrightarrow 0$, נקבל מחשבון גבולות:

$$\lim \frac{f(z_n)}{g(z_n)} = \lim \frac{\frac{f(z_n)}{g(z_n)} - \frac{f(a_n)}{g(z_n)}}{1 - \frac{g(a_n)}{g(z_n)}} = b.$$

בפירוט, נחלץ את $\frac{f(z_n)}{g(z_n)}$:

$$\frac{f(z_n)}{g(z_n)} = \frac{\frac{f(z_n)}{g(z_n)} - \frac{f(a_n)}{g(z_n)}}{1 - \frac{g(a_n)}{g(z_n)}} \cdot \left(1 - \frac{g(a_n)}{g(z_n)}\right) + \frac{f(a_n)}{g(z_n)} \longrightarrow b.$$

מ.ש.ל.

4 הוכחת המשפט עבור גבול ב ∞

המקרה $a = \infty$ נובע מהמקרה $a = 0^+$, כמו שראינו בהוכחת $\frac{0}{0}$. מגדירים $F(t) := f(\frac{1}{t})$ ו $G(t) := g(\frac{1}{t})$, ומקבלים את המקרה הקודם, עבור 0^+. מפעילים אותו, ומתרגמים.