לכל סידרה יש גבול חלקי מקסימלי

בועז צבאן

4 בנובמבר 2018

ההוכחה שראינו בכיתה לטענה שבכותרת היתה מעט מורכבת יותר ממה שהכרחי. נציע להלן הוכחה מתומצתת יותר.

תהי (a_n) סידרה. נוכיח שיש לה גבול חלקי מקסימלי.

אם $-\infty$ הוא גבול חלקי, ואין עוד גבולות חלקיים, אז הוא הגבול החלקי המקסימלי.

אם ∞ גבול חלקי, אז בודאי שהוא מקסימלי.

נותר המקרה שיש גבול חלקי שאינו $-\infty$, ו ∞ אינו גבול חלקי. מהסיבה השניה, הסידרה חסומה מלעיל.

יהי c חסם מלעיל של הסידרה. אם $b_n \longrightarrow b$ תת־סידרה, אז $b_n \leq c$ לכל b ולכן $b \leq c$.

לכן קבוצת הגבולות החלקיים (שאינה ריקה) חסומה מלעיל, ויש לה סופרמום s.

לכל n יש גבול חלקי $s - \frac{1}{n} < a$, ומתקיים $a \leq s < s + \frac{1}{n}$, ויחד $s + \frac{1}{n} < a < s + \frac{1}{n}$.

אם ניקח תת־סידרה $b_n \longrightarrow a$, לבסוף כל איבריה נמצאים בסביבה $(s - \frac{1}{n}, s + \frac{1}{n})$, ובפרט יש בסביבה זו אינסוף איברים מהסידרה המקורית (a_n). לכן s גבול חלקי.

מ.ש.ל.