

תחרות במתמטיקה

אוניברסיטת בר-אילן, המחלקה למתמטיקה, 6/1994

1. ידוע שמבין כל האליפסות החסומות במשולש, יש אליפסה יחידה בעלת שטח מקסימלי. מצא את היחס בין השטח הזה לבין שטח המשולש, כפונקציה של זוויות המשולש.

2. הוכח שהגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{\dots\sqrt{n}}}}}$ קיים, וקטן מ-3.

3. נסמן $P_1 = \{a + bz : a, b \in \mathbb{C}\}$ ו- $P_2 = \{a + bz + cz^2 : a, b, c \in \mathbb{C}\}$. יהי $\varphi: P_2 \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציונל ליניארי המקיים $\varphi(1) = 1$ ו- $\varphi(f) \neq 0$ לכל פולינום שאינו מתאפס בקטע $[0, 1]$.

הוכח ש- $\varphi(f_1 f_2) = \varphi(f_1) \varphi(f_2)$ לכל $f_1, f_2 \in P_1$.

האם מסקנה זו נשארת נכונה אם מחליפים את הקטע $[0, 1]$ במעגל היחידה $\{z : |z| \leq 1\}$?

4. בבחירות לאיגוד המסחר משתתפות שלוש מפלגות - "כף", "למד" ו"מס". המפלגות זכו במספר מושבים השווה לגימטריה של שמן, כלומר 80, 74, 100, בהתאמה. בכל פעם ששני נציגים ממפלגות שונות נפגשים לארוחת צהריים, הם מחליטים לפרוש מן המפלגות שלהם ולהצטרף למפלגה השלישית.

האם אפשר לתכנן סדרת פגישות שבסיומה ישתייכו כל הנציגים למפלגה "כף"?
כנ"ל לגבי כל אחת משתי המפלגות האחרות.

5. יהי $p(x)$ פולינום ממשי שכל שורשיו ממשיים. הוכח שלכל x ממשי מתקיים $p'(x)^2 \geq p(x)p''(x)$.