

תחרות במתמטיקה
י"א בטבת תשנ"א (28.12.1990)

הנחיות למשתתפים

- א. תרגילים 3,4,5,6,7,8 מיועדים לתלמידים הלומדים מתמטיקה ראשי בשנה ב' או ג'.
ב. תרגילים 1,2,3,4,5,6 מיועדים ליתר התלמידים (כלומר, כל תלמידי שנה א' ותלמידים מתקדמים שאינם לומדים מתמטיקה כמקצוע ראשי).

* * * * *

1. א. הוכח שכל תלת איבר ניתן להציג כהפרש של שני פולינומים מונוטוניים (עולים).
ב. הנ"ל לכל פולינומים $f(x)$.

2. הוכח:

- א. $\sin 18^\circ$ היא מספר אי-רציונלי.
ב. $\cos 20^\circ$ היא מספר אי-רציונלי.

3. האם קיימת פונקציה רציפה $f: R \rightarrow R$ כך שלכל $x \in R$ מתקיימות התכונות הבאות:
א. אם $f(x)$ רציונלי אזי $f(x+1)$ אי-רציונלי.
ב. אם $f(x)$ אי-רציונלי אזי $f(x+1)$ רציונלי.

4. כמה נקודות (n, m) , שלמים m, n , קיימות על ההיפרבולה

- א. $x^2 - y^2 = 1$
ב. $x^2 - 2y^2 = 1$
ג. מצא את כל הנקודות האלה.

5. נתונות שתי סדריות ממשיות $\{a_n\}$ ו- $\{b_n\}$ שמוגדרות לפי נוסחאות הנסיגה

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \sqrt{1 + a_n^2}$$
$$b_1 = \sqrt{3}, \quad b_{n+1} = b_n + \sqrt{1 + b_n^2}$$

חשב

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a_n / b_n$$

6. מכל המצולעים בעלי היקף 27, מצא מצולע כך שמכפלת אורכי הצלעות תהיה מקסימלית. מה מספר הצלעות של המצולע?

7. הוכח שאם לכל זוג של אלמנטים a, b של חבורה G מתקיימות התכונות הבאות:

$$(ab)^3 = a^3 b^3, \quad (ab)^4 = a^4 b^4, \quad (ab)^5 = a^5 b^5$$

אז החבורה G היא קומוטטיבית.

8. האם קיימות מטריצות ריבועיות 2×2 A ו- B כך שקבוצת הערכים העצמיים של A ו- B ו- $A+B$ הם

$$\text{א. } \sigma(A) = \{1, 2\}, \sigma(B) = \{3, 4\}, \sigma(A+B) = \{5, 6\}$$

$$\text{ב. } \sigma(A) = \{1, 2\}, \sigma(B) = \{3, 4\}, \sigma(A+B) = \{3, 7\}$$

נמק את תשובתך.

בהצלחה!