

**תחרות במתמטיקה**  
**י"א בטבת תשנ"א (28.12.1990)**

הנחיות למשתתפים

- א. תרגילים 3,4,5,6,7,8 מיועדים לתלמידים הלומדים מתמטיקה ראשי בשנה ב' או ג'.  
ב. תרגילים 1,2,3,4,5,6 מיועדים ליתר התלמידים (כלומר, כל תלמידי שנה א' ותלמידים מתקדמים שאינם לומדים מתמטיקה כמקצוע ראשי).

\* \* \* \* \*

1. א. הוכח שכל תלת איבר ניתן להציג כהפרש של שני פולינומים מונוטוניים (עולים).  
ב. הנ"ל לכל פולינומים  $f(x)$ .

2. הוכח:

- א.  $\sin 18^\circ$  היא מספר אי-רציונלי.  
ב.  $\cos 20^\circ$  היא מספר אי-רציונלי.

3. האם קיימת פונקציה רציפה  $f: R \rightarrow R$  כך שלכל  $x \in R$  מתקיימות התכונות הבאות:  
א. אם  $f(x)$  רציונלי אזי  $f(x+1)$  אי-רציונלי.  
ב. אם  $f(x)$  אי-רציונלי אזי  $f(x+1)$  רציונלי.

4. כמה נקודות  $(n, m)$ , שלמים  $m, n$ , קיימות על ההיפרבולה

- א.  $x^2 - y^2 = 1$   
ב.  $x^2 - 2y^2 = 1$   
ג. מצא את כל הנקודות האלה.

5. נתונות שתי סדריות ממשיות  $\{a_n\}$  ו-  $\{b_n\}$  שמוגדרות לפי נוסחאות הנסיגה

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \sqrt{1 + a_n^2}$$
$$b_1 = \sqrt{3}, \quad b_{n+1} = b_n + \sqrt{1 + b_n^2}$$

חשב

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a_n / b_n$$

6. מכל המצולעים בעלי היקף 27, מצא מצולע כך שמכפלת אורכי הצלעות תהיה מקסימלית. מה מספר הצלעות של המצולע?

7. הוכח שאם לכל זוג של אלמנטים  $a, b$  של חבורה  $G$  מתקיימות התכונות הבאות:

$$(ab)^3 = a^3b^3, \quad (ab)^4 = a^4b^4, \quad (ab)^5 = a^5b^5$$

אז החבורה  $G$  היא קומוטטיבית.

8. האם קיימות מטריצות ריבועיות  $2 \times 2$   $A$  ו-  $B$  כך שקבוצת הערכים העצמיים של  $A$  ו-  $B$  ו-  
 $A + B$  הם

$$\text{א. } \sigma(A) = \{1, 2\}, \sigma(B) = \{3, 4\}, \sigma(A+B) = \{5, 6\}$$

$$\text{ב. } \sigma(A) = \{1, 2\}, \sigma(B) = \{3, 4\}, \sigma(A+B) = \{3, 7\}$$

נמק את תשובתך.

בהצלחה!