תחרות במתמטיקה
סיבוב ראשון - ט"ו באדר ב' תשנ"ב (20.3.1992)

<u>הנחיות למשתתפים</u>

א. תרגילים 2,4,5,6,7 מיועדים לתלמידים הלומדים מתמטיקה ראשי בשנה ב' או ג'.
ב. תרגילים 1,2,3,4,5 מיועדים ליתר התלמידים (כלומר כל תלמידי שנה א' ותלמידים שאינם לומדים מתמטיקה כמקצוע ראשי).
אל תתיחס לעובדה שסכום הנקודות הוא גדול מ-100.

* * * * *

1. סדרת מספרים מוגדרת על ידי $(n \ge 1)$ $a_1 = 1; \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$.
מצא את המספר β כך ש- $a_{2n-1} < \beta < a_{2n}$, עבור כל $n \in \mathbb{N}$.

(20 נקודות)

2. נתון שמספרים $a_1.....a_{10}$ $(a_n \in \mathbb{R})$ מקיימים את השוויון $\sum_{k=1}^{10} \frac{a_k}{4k+1} = 0$ הוכח שבמשוואה $\sum_{k=1}^{10} a_k \cos\left((4k+1)x\right) = 0$ יש לפחות שורש אחד ב- $(0, \pi/2)$.

(20 נקודות)

3. א. הוכח שקיימים אינסוף מספרים טבעיים n שלא יתכן להציג אותם בצורה $n = m^2 + k^2$ $(m, k \in \mathbb{N})$ ויש אינסוף מספרים טבעיים שאפשר להציג בצורה $n = m^2 + k^2$.

(20 נקודות)

4. א. תהי $f(x) = x + 1$ $(f : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$. מצא פונקציות h ו- g $(h, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$ שמקיימות את התכונות הבאות:
(*) $g(g(x)) = x, \quad h(h(x)) = x, \quad f(x) = h(g(x))$ עבור כל x.
ב. הפונקציה $f : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$ מוגדרת בצורה $f(1) = 2, \quad f(2) = 3, \quad f(3) = 4, \quad f(4) = 5, \quad f(5) = 1$.
מצא פונקציות g,h $(g, h: \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\})$ שמקיימות את התכונות (*).
ג. נתונה קבוצה B (כלשהיא) ופונקציה $f : B \to B$ חד-חד ערכית ועל. הוכח שקיימות פונקציות $(g, h : B \to B)$ שמקיימות את התכונות (*).

(40 נקודות)

5. מצא את המקסימום של הפונקציה $f\left(x,y,z,t,u,v\right)=\left(z-x\right)\left(v-y\right)-\left(u-x\right)\left(t-y\right)$

בתנאים הבאים : $\begin{cases} x^2+y^2+x+y\le 1 \\ z^2+t^2+z+t\le 1 \\ u^2+v^2+u+v\le 1 \end{cases}$.

(30 נקודות)

6. יהיו $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ ערכים עצמיים של המטריצה $A=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x & 2 & 1 \\ 0 & y & 3 \end{Vmatrix}$.

עבור אילו ערכים של x ו- y $\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$ המספר $\max\limits_{m=1,2,3}\left|\lambda_m\right|$ יהיה מינימלי?

(20 נקודות)

7. מצא את כל הפונקציות הרציפות ב- $\left[0,1\right]$ שמקיימות את המשוואה

$$f\left(x\right)=\frac{1}{3}\left[f\left(\frac{x}{3}\right)+f\left(\frac{x+1}{3}\right)+f\left(\frac{x+2}{3}\right)\right] \qquad \left(0\le x\le 1\right)$$

(20 נקודות)

בהצלחה!