

**תחרות במתמטיקה**  
**ב' באייר תשנ"ג (23.4.1993)**

הנחיות למשתתפים

- א. תרגילים 2,3,4,6,7 מיועדים לתלמידים הלומדים מתמטיקה ראשי בשנה ב' או ג'.  
 ב. תרגילים 1,2,3,4,5 מיועדים ליתר התלמידים (כלומר, כל תלמידי שנה א' ותלמידים מתקדמים שאינם לומדים מתמטיקה כמקצוע ראשי).

\* \* \* \* \*

1. הוכח כי כל מספר שלם  $n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) ניתן להצגה  $n = \sum_{k=1}^5 n_k^3$  כאשר  $(n_k \in \mathbb{Z})$ .
2. א. האם קיימות  $n \times n$  מטריצות  $A, B$  כך ש-  $A^2 = E, B^2 = E$  (מטריצת היחידה) ו-  
 $AB + BA = 0$  ?  
 ב. אותה שאלה עבור  $n = 2m + 1$  ( $m \in \mathbb{N}$ ).
3. תהינה  $f$  ו-  $f'$  פונקציות רציפות על  $\left( f' = \frac{df}{dx}, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \right)$ . ידוע כי היום (23.4.1993)  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (23f'(x) + 4f(x)) = 1993$ .  
 מה יהיה מחר? כלומר מה הוא הגבול  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (24f'(x) + 4f(x))$  ?
4. מצא את המקסימום  $\left. \max \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} \mid a_n \geq 0, \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \right\} \right.$ .
5. פרופ' למתמטיקה נוסע מירושלים לבר-אילן במכוניתו בדיוק במשך שעה אחת. המרחק מהתחלת הנסיעה עד בר-אילן נהוא 60 ק"מ. נסמן ב-  $w(t) = \frac{d^2}{dt^2} w(t)$  את התאוצה בדרך. יש להוכיח כי הייתה נקודת הזמן  $t_0$  בדרך כך ש-  
 א.  $120 \leq |w(t_0)|$  קמ"ש  
 ב.  $240 \leq |w(t_0)|$  קמ"ש  
 ידוע כי הפונקציה  $w(t)$  רציפה והמהירות בהתחלת הנסיעה וגם בסופה שווה לאפס.
6. יהיו  $G$  חבורה סופית,  $e$  היחידה של  $G$ , ו-  $\varphi: G \rightarrow G$  אוטומורפיזם של  $G$  כך ש-  $\varphi(\varphi(x))$  עבור כל  $x$  ו-  $(\varphi(g) = g \Leftrightarrow g = e)$ .  
 הוכח כי  $G$  חבורה קומוטטיבית.
7. תהי  $\varphi(z) = \sum_{n=1}^5 \frac{1}{n^z}$ .  
 יש להוכיח כי  $\varphi(1+it) \neq 0$  עבור כל  $t \in \mathbb{R}$ .