תחרות במתמטיקה
סיבוב שני - כ"ח באייר תשנ"ו (1.3.1996)

הנחיות למשתתפים:
א. שאלות 4,5,6,7,8 מיועדות לסטודנטים הלומדים מתמטיקה כמקצוע ראשי בשנה ב או ג.
ב. שאלות 1,2,3,4,5 מיועדות ליתר המשתתפים (כלומר תלמידי שנה א או מי שאינם לומדים מתמטיקה כמקצוע ראשי).

****

1. שמונה כדורים נמצאים בקדקדיו של מתומן משוכלל. נניח שמשקלי הכדורים, בסדר ציקלי, הם: $m_1,...,m_8$.

הוכח שאם מרכז הכובד של מערכת הכדורים הוא מרכז המתומן, וכל המשקלים הם מספרים שלמים חיוביים - - אז המשקלים שווים בזוגות:

$$m_1 = m_5, m_2 = m_6, m_3 = m_7, m_4 = m_8 .$$

2. נניח ש- $\{a_n\}$ סדרה של מספרים ממשיים חיוביים, ויהי $s_n = a_1 + a_2 + .. + a_n$. נתון שמתקיים, לכל n גדול מספיק: $x \in \mathbb{R}$ ו- $a_n s_n - a_n \geq a_{n+1} s_{n+1} - a_{n-1}$. הוכח שהגבול $\lim_{n\to\infty} a_n$ קיים ומצא אותו.

3. האם אפשר, על ידי פעולות חיבור, כפל וחיסור בלבד, לקבל את הפולינום $h(x) = x$ מזוג הפולינומים $f(x), g(x)$ כאשר:
א. $f(x) = x^2 + x, \quad g(x) = x^2 + 2$?
ב. $f(x) = x^2 + x, \quad g(x) = x^2 - 2$?
ג. $f(x) = 2x^2 + x, \quad g(x) = 2x$?
ד. $f(x) = 2x^3 + x, \quad g(x) = x^2$?

4. תהי $\{x_n\}$ סדרה של מספרים בקטע $[0,1]$ המקיימים: $\exp\dfrac{n}{x_n(x_n-1)} = \int_0^1 \exp\dfrac{n}{x(x-1)}dx$.
הוכח שהגבול $\lim_{n\to\infty} x_n$ קיים ומצא אותו.

5. נניח ש- $a,b,c \in \mathbb{R}$ מקיימים, לכל $0 \leq x \leq 1$ $|ax^2+bx+c| \leq 1$ הוכח כי $|a-b+c| \leq 17$.
האם החסם הטוב ביותר?

6. נתונים וקטורים $(\lambda_1,...,\lambda_n),(\mu,...,\mu_n) \in \mathbb{C}^n$. האם קיימות מטריצות $A,B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ המקיימות
$\lambda_1,...,\lambda_n$ הם הערכים העצמיים של A
$\mu_1,...,\mu_n$ הם הערכים העצמיים של B
וכן $rank(A-B)$?

7. יהי R חוג המקיים $\left(a^3=0, a\in R\right) \Leftarrow a=0$.
נניח ש- $a_1, a_2, a_3 \in R$ מקיימים $a_1a_2a_3=0$.
הוכח ש- $a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}a_{\sigma(3)}=0$ לכל תמורה σ של $\{1,2,3\}$.

8. תהי $\|\ \|$ נורמה של מטריצות המוגדרת על האלגברה $M=\mathbb{R}^{n\times n}$ (בפרט $\|AB\|\le\|A\|\ \ \|B\|$ לכל $A,B\in M$).
נתון: $\left|tr\left(A^2\right)\right|\le 5\|A\|^2$ לכל $A\in M$.
א. הוכח: $\left|tr\left(A^3\right)\right|\le 15\|A\|^3$ לכל $A\in M$.
ב. מצא, לכל $m\ge 2$, קבוע $c_m>0$ כך ש- $\left|tr\left(A^m\right)\right|\le c_m\|A\|^m$ לכל $A\in M$. (תזכורת: $tr\left(a_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$).

בהצלחה!