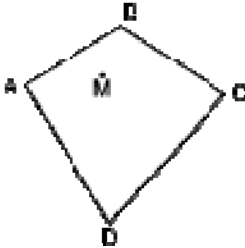


תחרות במתמטיקה
סיבוב שני - כ"ח באייר תשנ"ז (15.4.1997)

1. האם קיימים מספרים טבעיים $m < n$ כך שהמספר $\sum_{k=m}^n \frac{1}{k}$ הוא שלם?
 2. תהי f פונקציה אנליטית בעיגול $\{z: |z| < 1\}$. הוכח שאם $\operatorname{Re} f'(z) > \operatorname{Im} f'(z)$ לכל z בעיגול אז f חד חד ערכית: $z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$.

3. תהי Q קבוצת המרובעים $ABCD$ בעלי היקף $|AB| + |BC| + |CD| + |DA| = 1$. הוכח כי $\sup_{q \in Q} \max_{M \in q} (|MA| + |MB| + |MC| + |MD|) = 3/2$.



4. תהי $x = (\mathbb{Q}, +)$ חבורת המספרים הרציונליים ביחס לפעולת החיבור, ותהי $A \subseteq B \subseteq \mathbb{Q}$ תת חבורות של \mathbb{Q} . הוכח שאם A סגורה ביחס לחילוק ב-1997 אז גם B סגורה ביחס לחילוק ב-1997. האם טענה זו נכונה גם כאשר מחליפים את 1997 ב-5757 (התשנ"ז)?
 5. עבור סדרה (x_n) של מספרים ממשיים נסמן:

$$S_n := \sum_{m=1}^n x_m, \quad P_n = \prod_{m=1}^n (1 + X_m), \quad \sigma_n = \sum_{m=1}^n x_m^2$$

- א. האם קיימת סדרה (x_n) כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ קיימים?
 ב. האם קיימת סדרה (x_n) כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n \neq 0$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ קיים?
 ג. הוכח שאם $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n < \infty$ אז מתקיים: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P_n \neq 0$.
 6. א. מצא את הדטרמנטה (מסדר $n \times n$):

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

- ב. האם קיימים מספרים $a_{ij} \in \{1, 0, -1\}$ ($1 \leq ij \leq 12$) כך ש- $\det(a_{ij})_{i,j=1}^{12} = 1997$?