תחרות בר-אילן במתמטיקה לסטודנטים (תשס"ב)

1. מצא את המרחק בין הגרפים של הפונקציות $y=e^{ex}$ ו- $y=\frac{\ln(x)}{e}$.

2. חשב את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$.

3. תהי $f(x)$ פונקציה גזירה פעמיים בקטע הסגור $[0,1]$ ומקיימת את התנאים $f(0)=f(1)=0$, $\min\limits_{x\in[0,1]}f(x)=-1$.

   <u>הוכח:</u> $\max\limits_{x\in[0,1]}f''(x)\ge 8$.

4. חשב את האינטגרל $\int_0^{2\pi}\sin(\sin x+nx)dx$ לכל n שלם.

5. מצא בעיגול הסגור $\{z\in \boldsymbol{C}:|z|\le 1\}$ נקודות מיוחדות של הפונקציה המוגדרת על-ידי הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^3}$.

6. תהי $x(t)=\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\mu_j}{t-a_j}$ פונקציה המוגדרת על-ידי הפרמטרים הממשיים $a_1<a_2<\ldots<a_n$ ו- $\mu_j>0$ $(1\le j\le n)$.

   <u>הוכח:</u> לכל $c>0$, מידת הקבוצה $E=\{t\in\boldsymbol{R}:|x(t)|\ge c\}$ היא $m(E)=\frac{2}{c}\sum\limits_{j=1}^{n}\mu_j$.

7. האם אפשר להגדיר מכפלה פנימית במרחב $\boldsymbol{R}^2$ כך שכדור היחידה יהיה אליפסה?

8.

   א) מצא את הערך המוחלט המקסימלי של דטרמיננטה מסדר 3×3 שאיבריה מספרים ממשיים בעלי ערך מוחלט קטן או שווה ל-1.

   ב) כנ"ל לדטרמיננטה מסדר 5×5 .

   ג) הכלל את התוצאה לדטרמיננטה מסדר $n\times n$.

9. במשוואה $z^3+az^2+bz+c=0$ המקדמים c,b,a הם מספרים ממשיים. מצא תנאי הכרחי ומספיק על המקדמים לכך שהחלקים הממשיים של כל שורשי המשוואה יהיו שליליים.

10. האם קיימים מספר ממשי $a>0$ ופונקציות $q(x),p(x)$ רציפות בקטע $(-a,a)$ כך שבקטע זה הפונקציה $y=1-\cos(x)$ תקיים את המשוואה $y''+p(x)y'+q(x)y=0$?