

תחרות בר-אילן במתמטיקה לסטודנטים
ב' בניסן התשס"ג (4.4.03)

1. הסדרה (x_n) מקיימת את נוסחת הנסיגה: $(n \geq 1) \quad x_{n+2} = \frac{5}{2}x_{n+1} + x_n$. באילו תנאים על x_1, x_2 קיים וסופי הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$? חשב את הגבול.
2. נתון שלפולינום $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + 1$ יש n שורשים ממשיים, וכל מקדמיו חיוביים. הוכח: $P_n(2) \geq 3^n$.

3. מצא את המרחק מהישר $2x + y = 5$ לאליפסה $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$.

4. חשב את הדטרמיננטה $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}$ אם α, β, γ הם שלושת שורשי המשוואה $x^3 + px + q = 0$.

5. מצא את הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} (A^n - I) \right]$ כאשר $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{n} \\ -\frac{x}{n} & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, הסדרה a_n מונוטונית יורדת. הוכח: $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$.

7. מצולע משוכלל בעל N צלעות חסום במעגל ברדיוס $R=1$. מחברים את אחד הקודקודים לכל האחרים (שתי צלעות, $N-3$ אלכסונים). הוכח כי המכפלה של אורכי כל הקטעים הללו שווה ל- N .

8. מה יותר גדול: $\int_0^{\pi} e^{\sin^2 x} dx$ או $\frac{3\pi}{2}$? (נמק!)

9. נקודה נעה במישור (x_1, x_2) כשתנועתה מתוארת על-ידי מערכת המשוואות
$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = 1 \\ x_1(0) = x_2(0) = 0 \end{cases}$$
 חשב את אורך המסילה במשך הזמן מ-0 ל- t .

10. מהי ההסתברות ששני שורשי המשוואה $x^2 + px + q = 0$ הם ממשיים, אם $-16 \leq p \leq 16$, $-16 \leq q \leq 16$ בהתפלגות אחידה?