תחרות בר-אילן במתמטיקה לסטודנטים (תשס"ד)

1. הוכח: אם $\left|a_{ii}\right| > \sum_{j:j\neq i}\left|a_{ij}\right|$ עבור כל i, אז הדטרמיננטה $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$.

2. האם קיימת פונקציה $f: R_+ \to R_+$ (כאשר R_+ היא קבוצת המספרים הממשיים החיוביים) המקיימת את התנאי $f(xy) = \frac{f(x)+f(y)}{x+y}$ עבור כל $x, y \in R_+$?

3. הוכח: $\max_{-1\le x\le 1}\left|x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d\right| \ge \frac{1}{8}$ עבור כל a,b,c,d ממשיים.

4. חשב: $\int_0^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{\infty} r^k \sin kt\right)dt$, כאשר $0 \le r < 1$.

5. הוכח כי למשוואה הדיפרנציאלית $y' = y^2 + x$, עם תנאי ההתחלה $y(0) = 0$, אין פתרון המוגדר בקטע $[0,3)$.

6. הוכח את אי השוויון $a^2 + b^2 + c^2 + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \ge 2ab + 2bc + 2ac$ עבור כל a,b,c ממשיים.

7. האם הסדרה הבאה מתכנסת? אם כן, חשב את הגבול שלה: $x_1 = \frac{8}{17} \quad , \quad x_{n+1} = \frac{1}{x_n} - \frac{3}{2} \quad (n \ge 1)$.

8. ישר מחלק משולש לשני חלקים שווי-שטחים ושווי-היקפים. הוכח: מרכז המעגל החסום במשולש נמצא על ישר זה.

9. במעגל נתון בוחרים מיתר אקראי. מהי ההסתברות שאורך המיתר גדול מרדיוס המעגל:
   א. בהתפלגות אחידה של אמצע המיתר (בעיגול)?
   ב. בהתפלגות אחידה של קצות המיתר (על המעגל)?
   ג. בהתפלגות אחידה של המרחק ממרכז המעגל למיתר?

10. נתבונן בסדרה: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$. לסדרה זו יש תת סדרה חשבונית באורך 3: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$, וגם תת-סדרה חשבונית באורך 4: $\frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}$.
    א. מצא תת-סדרה חשבונית באורך 5.
    ב. מצא תת-סדרה חשבונית באורך k, לכל k טבעי.