תחרות בר-אילן במתמטיקה לסטודנטים (תשס״ה)

1. תהי φ פונקציה אינטגרבילית בעלת מחזור 2π המקיימת: $\int_0^{2\pi}\varphi(x)dx=0$. הוכח שלכל פונקציה אינטגרבילית f מתקיים: $\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(t)\varphi(nt)dt=0$.

2. הוכח שארבעת הקדקודים של ריבוע אינם יכולים להמצא על ארבעה מעגלים בעלי מרכז משותף עם רדיוסים המהווים סדרה חשבונית.

3. מצא תנאי הכרחי ומספיק על המקדמים $b(x),a(x)$ של המשוואה $y''+a(x)y'+b(x)y=0$ כך שיהיו לה שני פתרונות בלתי תלויים לינארית מהצורה $y=f(x)$, $y=f(x)^2$.

4. הוכח שאין פתרון שלם x למשוואה $x^4+4^x=p$ כאשר $p>5$ ראשוני.

5. הוכח שעבור $a,b\ge 1$ מתקיים: $ab\le e^{a-1}+b\ln b$.

6. הסדרה (x_n) מוגדרת באמצעות נוסחת הנסיגה $(n\ge 1)$ $x_n=0.5x_{n-1}^2-1$ כאשר $x_0=1/3$. האם הגבול $\lim_{n\to\infty}x_n$ קיים? אם כן, מצא אותו.

7. מצא את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימות $xf(y)-yf(x)=(x-y)f(x)f(y)$.

8. הוכח שאם $p_1,\dots,p_n\ge 0$ ולא כולם אפסים, אז לפולינום $z^n-p_1z^{n-1}-\dots-p_{n-1}z-p_n$ יש שורש חיובי אחד בדיוק.

9. בקדקודי ריבוע רשומים, באופן ציקלי, מספרים שלמים d,c,b,a. נגדיר ״צעד בסיסי״ שבו הם מוחלפים במספרים $|d-a|,|c-d|,|b-c|,|a-b|$ בהתאמה. הוכח או הפרך: מכל מצב התחלתי נגיע, לאחר מספר סופי של צעדים, לרביעית אפסים.

10. תהי $A=\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}$ כאשר c,b,a הם מספרים ממשיים. מצא לאילו ערכים של c,b,a קיים n טבעי כך ש-: $A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

בהצלחה!