

## תחרות ארצית במתמטיקה לסטודנטים כ"א במרחשון, תשס"ה (5 נוב., 04)

1. מצא את כל הפונקציות הגזירות  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימות

$$f'((x+y)/2) = \frac{f(y) - f(x)}{y-x} \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y)$$

2. תהינה  $A_1, A_2, \dots, A_n$  תת-קבוצות מדידות של הקטע  $[0, 1]$  שסכום מידותיהן גדול מ-1:

$$\sum_{i=1}^n m(A_i) > n-1$$

הוכח שחיתוך כל הקבוצות הוא בעל מידה חיובית:

$$m\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) > 0$$

3. יהיו  $a_0, a_1 > 0$ . נגדיר:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{1 + a_n a_{n-1}} \quad (n \geq 1)$$

האם הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  קיים? אם כן, מצא אותו.

4. הפונקציה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  מוגדרת וגזירה אינסוף פעמים, ומקיימת את התנאי

$$|f^{(n)}(x) - f^{(n-1)}(x)| < \frac{1}{n^2} \quad (\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1)$$

הוכח שקיים קבוע ממשי  $c$  כך ש-:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(x) = ce^x \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

5. משולש חסום במעגל. יהי  $MN$  קטע אמצעים במשולש. הוכח שהנקודה הסימטרית למרכז המעגל ביחס לאמצע הקטע  $MN$  נמצאת על הגובה (במשולש) לצלע המקבילה לקטע  $MN$ .

6. יהיו  $c_k = a_k + ib_k$  ( $0 \leq k \leq n$ ) מספרים מרוכבים, כאשר  $a_k, b_k$  ממשיים. נתון שכל השורשים של הפולינום  $R(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n$  נמצאים מעל לישר הממשי ( $\text{Im } z > 0$ ). הוכח: כל השורשים של הפולינומים  $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ ,  $Q(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n$  הם ממשיים.

7. יהיו  $b, a$  שנים מארבעת שורשי הפולינום  $x^4 + x^3 - 1$ . הוכח:  $ab$  הוא שורש של הפולינום  $x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1$ .

8. הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת ורציפה בקטע הסגור  $[a, b]$ , ומקיימת:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)^2$$

הוכח שקיימות שתי נקודות שונות  $x_1, x_2 \in [a, b]$  המקיימות

$$f(x_1)f(x_2) = (b-a)^2$$

9. נתבונן באוסף כל המטריצות הסימטריות הממשיות מסדר  $2 \times 2$ ,  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ ,

עם ערכים עצמיים נתונים  $\lambda_1, \lambda_2$ . מצא את הערך המקסימלי והערך המינימלי האפשריים עבור  $b$ .

10. בתוך לוח משובץ בגודל  $n \times n$  בוחרים באופן אקראי מלבן המורכב ממשבצות (עם צלעות מקבילות לצלעות הלוח). מה ההסתברות שהמלבן הוא בעצם ריבוע?