בס"ד

כ"א באייר תשס"ו
19 במאי, 06

תחרות בר-אילן במתמטיקה לסטודנטים תשס"ו

1. האם הסדרה הבאה מתכנסת? אם כן, חשב את הגבול שלה. נמק.

$$x_1=\frac{1}{2},\quad x_{n+1}=\left(1-x_n\right)^2\quad (n\ge 1)$$

2. הוכח שהביטוי

$$\frac{\sin[(n+1)\operatorname{arc}\cos x]}{\sqrt{1-x^2}}$$

הוא פולינום ממעלה n במשתנה x $(-1<x<1)$.

3. מצא את כל הפתרונות הגזירים של המשוואה

$$f(xy)=\frac{f(x)}{y}+\frac{f(y)}{x}\qquad (x,y>0)$$

4. חשב את האינטגרל $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

5. הפונקציה $y=y(x)$ מקיימת את המשוואה

$$y''=a(x)y\quad (x\ge 0)$$

כאשר $a(x)>0$ בתחום הנ"ל, וכן את התנאים

$$y(0)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}y(x)=0$$

הוכח כי $y(x)=0$ עבור כל x.

6. האם קיים פתרון למשוואה המטריציאלית $X^2+4X=\begin{pmatrix}-5&1&8\\0&6&2\\0&0&0\end{pmatrix}$?

7. הוכח: במשולש שזויותיו γ,β,α מתקיים אי השוויון $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le\frac{3}{2}$.

8. על פני הכדור בוחרים שתי נקודות אקראיות. מצא את ההסתברות שקשת המעגל הגדול (שמרכזה במרכז הכדור) המחברת את שתי הנקודות הנ"ל קטנה מ- α $\left(0<\alpha<\pi\right)$.

9. יהיו $p_0>p_1>p_2>\ldots>p_n>0$. הוכח כי לפולינום

$$p(z)=p_0+p_1z+p_2z^2+\ldots+p_nz^n$$

אין אפסים (מרוכבים) בעיגול הסגור $|z|\le 1$.

10. הוכח כי לכל פונקציה $f\left(x\right)$ הרציפה בקטע $\left[0,1\right]$ מתקיים השוויון

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(n+1\right)\int_0^1 f\left(x\right)x^n dx\right]=f\left(1\right)$$

בהצלחה!