תחרות בר-אילן במתמטיקה לסטודנטים תשס"ז

1. הסדרה x_n מוגדרת באמצעות נוסחת הנסיגה

$$x_{n+1}=\frac{x_n+1}{x_n+2}\qquad (n\ge 1)$$

כאשר $x_1=0$. האם הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ קיים? אם כן, מצא אותו.

2. תהי $f(x)$ בעלת נגזרת רציפה בקטע $[a,b]$ ומקיימת $f(a)=f(b)=0$. הוכח כי קיימת לפחות נקודה אחת $c\in[a,b]$ המקיימת

$$|f'(c)|\ge\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b|f(x)|\,dx$$

3. נתונה פירמידה מרובעת משוכללת וישרה שגובהה h. הזווית בין שתי פאות צדדיות סמוכות גדולה פי 3 מהזווית בין פאה צדדית לבסיס. חשב את נפח הפירמידה.

4. מצא את כל הפונקציות $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ המקיימות

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y)\qquad (\forall x,y\in\mathbf{R})$$

5. תהי $A=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$ מטריצה המקיימת

$$a_{ij}\ge 0,\quad \sum_{k=1}^n a_{ik}=\sum_{k=1}^n a_{kj}=1\quad (\forall i,j)$$

עבור וקטור עמודה $\overline{x}=(x_1,\ldots,x_n)^T\in\mathbf{R}_+^n$ (ז"א: $x_i\ge 0$ לכל i) נגדיר $\overline{y}=(y_1,\ldots,y_n)^T\in\mathbf{R}_+^n$ ע"י: $\overline{y}=A\overline{x}$. הוכח: $y_1y_2\cdots y_n\ge x_1x_2\cdots x_n$.

6. תהי $f(x)$ פונקציה גזירה ברציפות בקטע $[0,T]$ ותהי $g(x)$ פונקציה רציפה ב-$(-\infty,\infty)$ ובעלת מחזור T. הוכח:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T f(x)g(nx)dx=\frac{1}{T}\left(\int_0^T f(x)dx\right)\left(\int_0^T g(x)dx\right)$$

7. המספרים הטבעיים n,m מקיימים: $n\sqrt{7}-m>0$. הוכח כי, למעשה, $n\sqrt{7}-m>\frac{1}{m}$.

8. הוכח כי לפולינום $3z^5+z^4-6z^3+9z^2-4z+2$ אין אפסים בתחום $|z|>4$.

9. חשב: $\displaystyle\int_0^\infty\frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^\alpha\right)}$ (α ממשי).

10. מהי ההסתברות ששני שורשי המשוואה $x^2+2ax+b=0$ הם ממשיים חיוביים, אם נתון כי $|a|\le n$, $|b|\le m$ (ממשיים) בהתפלגות אחידה?

בהצלחה!