תחרות בר-אילן במתמטיקה לסטודנטים תשס"ז

1. הסדרה x_n מוגדרת באמצעות נוסחת הנסיגה

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{x_n + 2} \qquad (n \ge 1)$$

כאשר $x_1 = 0$. האם הגבול $\lim_{n\to\infty} x_n$ קיים? אם כן, מצא אותו.

2. תהי $f(x)$ בעלת נגזרת רציפה בקטע $[a,b]$ ומקיימת $f(a) = f(b) = 0$. הוכח כי קיימת לפחות נקודה אחת $c \in [a,b]$ המקיימת

$$| f'(c) | \ge \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b | f(x) | \, dx$$

3. נתונה פירמידה מרובעת משוכללת וישרה שגובהה h. הזווית בין שתי פאות צדדיות סמוכות גדולה פי 3 מהזווית בין פאה צדדית לבסיס. חשב את נפח הפירמידה.

4. מצא את כל הפונקציות $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ המקיימות

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot f(y) \qquad (\forall x, y \in \mathbf{R})$$

5. תהי $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n\times n}$ מטריצה המקיימת

$$a_{ij} \ge 0, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} = 1 \quad (\forall i, j)$$

עבור וקטור עמודה $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbf{R}_+^n$ (ז"א: $x_i \ge 0$ לכל i) נגדיר $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T \in \mathbf{R}_+^n$ ע"י: $\overline{y} = A\overline{x}$. הוכח: $y_1 y_2 \cdots y_n \ge x_1 x_2 \cdots x_n$.

6. תהי $f(x)$ פונקציה גזירה ברציפות בקטע $[0,T]$ ותהי $g(x)$ פונקציה רציפה ב-$(-\infty,\infty)$ ובעלת מחזור T. הוכח:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T f(x) g(nx) dx = \frac{1}{T} \left(\int_0^T f(x) dx \right) \left(\int_0^T g(x) dx \right)$$

7. המספרים הטבעיים n, m מקיימים: $n\sqrt{7} - m > 0$. הוכח כי, למעשה, $n\sqrt{7} - m > \frac{1}{m}$.

8. הוכח כי לפולינום $3z^5 + z^4 - 6z^3 + 9z^2 - 4z + 2$ אין אפסים בתחום $|z| > 4$.

9. חשב: $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$ (α ממשי).

10. מהי ההסתברות ששני שורשי המשוואה $x^2 + 2ax + b = 0$ הם ממשיים חיוביים, אם נתון כי $|a| \le n$, $|b| \le m$ (ממשיים) בהתפלגות אחידה?

בהצלחה!