

תחרות בר-אילן במתמטיקה לסטודנטים תשס"ח

- מצא את כל הפונקציות הגזירות $f: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ המקיימות
 $f'(x) > 0, \quad f(f'(x)) = -f(x) \quad (\forall x > 0)$
- במטריצה A מסדר 3×3 סכום האברים בכל עמודה הוא 4, סכום האברים באלכסון הראשי הוא 8 והדטרמיננטה היא 16. מצא את כל הערכים העצמיים של A .
- תחום מישורי מוגבל על-ידי עקום קמור, סגור ורציף. דרך נקודה M הנמצאת בתוך התחום מעבירים מיתר המגביל, מצידו האחד, שטח מינימלי (בין כל המיתרים דרך M). הוכח כי הנקודה M היא אמצע המיתר.
- מצא את כל הפולינומים $P(x)$ המקיימים
 $x \cdot P(x-1) = (x-2) \cdot P(x) \quad (\forall x \in \mathbf{R})$
- שרשרת שאורכה 4 מ' גולשת משולחן אופקי וחלק. במצב ההתחלתי השרשרת נמצאת במנוחה, כאשר קטע באורך 0.5 מ' תלוי מקצה השולחן. מצא תוך כמה זמן תיפול כל השרשרת מהשולחן.
- חשב את שטח החיתוך של הגליל $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ והמישור $Ax + By + Cz = 0$.
- סדרה יורדת (x_n) של מספרים חיוביים מקיימת, לכל n טבעי,
$$x_1 + \frac{x_4}{2} + \frac{x_9}{3} + \dots + \frac{x_{n^2}}{n} \leq 1$$

הוכח כי

$$x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \dots + \frac{x_n}{n} \leq 3$$
- פולינום $Q(x)$ מקיים את המשוואה
 $\cos^2(3x) \sin(2008x) = \sin(4x) Q(\cos x)$

מצא את סכום המקדמים של הפולינום $Q(x)$.
- פונקציה $f(x)$, גזירה ברציפות וקמורה כלפי מטה, מקיימת
 $0 < f'(1) < 2f(1)$

הוכח:

$$\int_0^1 f(x) dx > 0$$
- על מעגל שרדיוסו R בוחרים באקראי שלוש נקודות A, B, C . מה ההסתברות שהמשולש ABC חד-זוויות?

ג ה 3 ה ח ה !