

תחרות בר-אילן במתמטיקה לסטודנטים תשס"ט

1. האם הסדרה הבאה מתכנסת? נמק. אם כן, חשב את הגבול שלה.
$$x_1 = 2, \quad x_n = \frac{4x_{n-1} - 1}{2x_{n-1} - 1} \quad (n \geq 2)$$
2. תהינה A, B מטריצות ממשיות מסדר $n \times n$ המקיימות $AB = BA$. הוכח כי $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.
3. עבור אילו ערכים של $a > 1$ מתקיים, לכל $x > 0$, אי-השוויון $x \cdot \log_a x \geq x - 1$?
4. בפירמידה משולשת שאורכי ארבעת גבהיה הם h_4, h_3, h_2, h_1 חסום כדור ברדיוס r . הוכח:
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}$$
5. מצא את כל הפתרונות הגזירים, המוגדרים בקטע $(-1, 1)$, של המשוואה
$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$$
6. האם למשוואה הדיפרנציאלית $y' = y - e^{-x^2}$ קיים פתרון השואף לאפס גם כאשר $x \rightarrow \infty$ וגם כאשר $x \rightarrow -\infty$? אם כן, מצא את מספר הפתרונות הללו.
7. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת וגזירה בקטע $[0, 4]$, ומקיימת את התנאים
 $f(0) = 0, \quad f(4) = 4, \quad |f'(x)| \leq 2 \quad (\forall x)$
הוכח כי $\max_{x \in [0, 4]} f(x) < 6$.
8. מצא את הגבול
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 \cdot \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} \frac{\sin x}{x} dx \right)$$
9. הוכח כי המספר $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$ הוא אי-רציונלי.
10. בשני כדים נמצאים 25 כדורים לבנים ושחורים, בסך הכל. מכל כד מוציאים כדור אחד, באופן אקראי. ידוע כי ההסתברות ששני הכדורים שהוצאו היו לבנים היא 0.54. מה ההסתברות ששני הכדורים שהוצאו היו שחורים?

בהבהבה!