

תחרות בר-אילן במתמטיקה לסטודנטים תש"ע

1. הוכח שלכל n טבעי, המספר $\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$ הוא מספר שלם אי-זוגי.

2. תהי B תיבה שאורכי צלעותיה a, b, c . מצא את השטח המקסימלי של היטל B על מישור.

3. הוכח את אי-השוויון

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \geq \cos x$$

$$\text{עבור } 0 \leq |x| \leq \frac{\pi}{2}$$

4. היקפו של טרפז שווה-שוקיים הוא 28 ואורך הבסיס הגדול הוא 13.

א. מצא את אורכי צלעות הטרפז אם נתון ששטחו 27.

ב. האם שטח הטרפז יכול להיות 27.001?

5. מטריצות B, A מקיימות את התנאים הבאים:

$$A^2 = A, \quad B^2 = B, \quad AB = BA$$

$$\text{הוכח כי } \det(A - B) \in \{-1, 0, 1\}$$

6. פתור את מערכת המשוואות הדיפרנציאליות (עבור $t \in \mathbb{R}$):

$$\begin{cases} x'(t) = y(1-t) \\ y'(t) = -x(1-t) \end{cases}$$

7. מצא את סכום הטור (אם קיים):

$$\frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \tan \frac{x}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n} + \dots$$

8. בלוח משובץ בגודל $n \times n$ מגרילים באופן בלתי תלוי שתי משבצות (לאו דווקא שונות), ומסמנים את המלבן הקטן ביותר המכיל את שתייהן; צלעות המלבן מקבילות לצלעות הלוח. מה ההסתברות שהמלבן הוא בעצם ריבוע?

9. פתור את המשוואה

$$2^{-|x|} = \frac{1}{2\sqrt{2}} (|x+1| + |x-1|)$$

10. מצא את כל הפתרונות $f(x)$, הגזירים לכל $x \in \mathbb{R}$, של המשוואה הפונקציונלית

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(x)f(y)$$

הנה 3 פתרונות!