בס"ד

ב' בשבט תשע"א
7 בינו', 11

תחרות בר-אילן במתמטיקה לסטודנטים תשע"א

1. האם הסדרה $x_{n+1}=\dfrac{2}{3-x_n}$, $x_1=\dfrac{1}{2}$ מתכנסת? אם כן, חשב את הגבול שלה. נמק.

2. מצא את כל הפתרונות הגזירים $f(x)$ של המשוואה הפונקציונלית
$$f(x)+f^{-1}(x)=2x \qquad (\forall x\in\mathbb{R})$$
כאשר $f^{-1}(x)$ היא הפונקציה ההופכית ל- $f(x)$.

3. הוכח שהפולינום $x^{771}+x^{71}+x$ מתחלק ללא שארית בפולינום x^2+x+1.

4. הוכח שהנגזרת מסדר k של הפונקציה $y(x)=\cos^3(x)$ מקיימת
$$\left|y^{(k)}(x)\right|\le\frac{3^k+3}{4} \qquad (\forall k\ge 0,\, x\in\mathbb{R})$$

5. הוכח שהמטריצה מסדר $n\times n$ $J_n=\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 1&\cdots&1\end{pmatrix}$ מקיימת $(I-J_n)^{-1}=I-\dfrac{1}{n-1}J_n$
כאשר I מטריצת היחידה מסדר $n\times n$.

6. מצא את הערך המקסימלי של $\left|\sum_{i=1}^{n}\sin(2x_i)\right|$ כאשר $\sum_{i=1}^{n}\sin^2 x_i=a$.

7. כל מקדמי הפולינום $P(x)$ הם ממשיים וכל שורשיו מדומים טהורים (שונים מאפס).
הוכח שכל שורשי הנגזרת $P'(x)$ הם מדומים טהורים (כולל אפס).

8. בפירמידה מרובעת משוכללת וישרה נתון: מרכז הכדור החוסם את הפירמידה מתלכד עם מרכז הכדור החסום בפירמידה. חשב את זווית הראש של פאה צדדית בפירמידה.

9. מצא את היחס $\dfrac{1+\frac{\pi^4}{5!}+\frac{\pi^8}{9!}+\frac{\pi^{12}}{13!}+\dots}{\frac{1}{3!}+\frac{\pi^4}{7!}+\frac{\pi^8}{11!}+\frac{\pi^{12}}{15!}+\dots}$.

10. בוחרים באקראי שני מספרים חיוביים קטנים מ-1. מה ההסתברות שסכום המספרים קטן מ-1 ומכפלתם קטנה מ- $\dfrac{2}{9}$?

בהצלחה!