

תחרות בר-אילן במתמטיקה לסטודנטים תשע"א

1. האם הסדרה $x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = \frac{2}{3-x_n}$ מתכנסת? אם כן, חשב את הגבול שלה. נמק.
2. מצא את כל הפתרונות הגזירים $f(x)$ של המשוואה הפונקציונלית $f(x) + f^{-1}(x) = 2x \quad (\forall x \in \mathbb{R})$
כאשר $f^{-1}(x)$ היא הפונקציה ההופכית ל- $f(x)$.
3. הוכח שהפולינום $x^{771} + x^{71} + x + 1$ מתחלק ללא שארית בפולינום $x^2 + x + 1$.
4. הוכח שהנגזרת מסדר k של הפונקציה $y(x) = \cos^3(x)$ מקיימת $|y^{(k)}(x)| \leq \frac{3^k + 3}{4} \quad (\forall k \geq 0, x \in \mathbb{R})$
5. הוכח שהמטריצה מסדר $n \times n$ $J_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ מקיימת $(I - J_n)^{-1} = I - \frac{1}{n-1} J_n$
כאשר I מטריצת היחידה מסדר $n \times n$.
6. מצא את הערך המקסימלי של $\left| \sum_{i=1}^n \sin(2x_i) \right|$ כאשר $\sum_{i=1}^n \sin^2 x_i = a$.
7. כל מקדמי הפולינום $P(x)$ הם ממשיים וכל שורשיו מדומים טהורים (שוניים מאפס).
הוכח שכל שורשי הנגזרת $P'(x)$ הם מדומים טהורים (כולל אפס).
8. בפירמידה מרובעת משוכללת וישרה נתון: מרכז הכדור החוסם את הפירמידה מתלכד עם מרכז הכדור החסום בפירמידה. חשב את זווית הראש של פאה צדדית בפירמידה.
9. מצא את היחס $\frac{1 + \frac{\pi^4}{5!} + \frac{\pi^8}{9!} + \frac{\pi^{12}}{13!} + \dots}{\frac{1}{3!} + \frac{\pi^4}{7!} + \frac{\pi^8}{11!} + \frac{\pi^{12}}{15!} + \dots}$
10. בוחרים באקראי שני מספרים חיוביים קטנים מ-1. מה ההסתברות שסכום המספרים קטן מ-1 ומכפלתם קטנה מ- $\frac{2}{9}$?

בהבהבה!