

שאלון בחינה בקורס: גיאומטריה פרויקטיבית (88-524)
סמסטר ב', מועד ב', 10.09.15
מרצה: פרופ' מיכאל כץ
זמן בחינה: שתי שעות וחצי

יש לענות על כל השאלות ולתת נימוק והסבר.

1. יהי s מעגל במישור. משולש במישור נקרא דואלי לעצמו כאשר כל קודקוד הוא פולרי (ביחס ל- s) לצלע ממול. יהי ABC משולש דואלי לעצמו.

- הוכח שמרכז מעגל s הוא נקודת חיתוך של גבהים של משולש ABC .
- הוכח שאחד מן הקודקודים של ABC בהכרח נמצא בתוך המעגל ושניים מחוצה לו.
- הצג שרטוט מדויק כדי לאייר את חלקים א' ו-ב'.

2. הוכיחו שנקודות החיתוך של חוצי הזוויות החיצוניות במשולש עם צלעות המשולש נמצאות על ישר אחד (קולינאריות).
הערה: הזווית החיצונית למשולש היא הזווית בין צלע להמשך צלע אחרת. זווית זו המשלימה את הזווית הפנימית ל-180 מעלות.

3. בכל סעיף בשאלה זו נתונים שני חתכי חרוט, מצאו העתקה פרויקטיבית המעבירה את הראשון לשני.
א.

ב. $\frac{X^2}{4} + Y^2 = 1$, $x^2 - 5xy + y^2 = 1$

ג. $X^2 + Y^2 = 1$, $(x-1)^2 + y^2 = 1$

4. יהיו p, p' ישרים שונים במישור פרואקטיבי. נתבונן בנקודות $A, B, C \in p$ וגם $A', B', C' \in p'$.

- בסימנים דלעיל, נסח ביטוי מפורט של משפט Pappus.
- תרגם נקודות לישרים וגם קולינאריות לקונקורנטיות, ונסח ביטוי מדויק של משפט דואלי למשפט Pappus.
- שרטט ציור מדויק המהווה איור למשפט של סעיף ב'.

5. יהי $R(A, B, C, D_k)$ יחס הכפול של נקודות על ישר מרוכב פרויקטיבי, כאשר $A = \infty$, $B = 0$, $C = 1$. תהי נקודה $D_k = e^{\frac{ik\pi}{6}}$, כאשר $k = 1, \dots, 6$.

- א. מהם הערכים האפשריים השונים של היחס הכפול תחת כל התמורות של רביעיה (A, B, C, D_k) כאשר $k=1$?
- ב. מהם הערכים האפשריים של היחס הכפול תחת כל התמורות של הרביעיה כאשר $k=2$?
- ג. תהי $f(k)$ מספר טוטאלי של ערכים שונים זה מזה של היחס הכפול תחת כל התמורות של רביעיה (A, B, C, D_k) . חשב $f(k)$ כפונקציה מפורשת של האינדקס $k=1, \dots, 6$.

בהצלחה!