שאלון בחינה בקורס: גיאומטריה דיפרנציאלית ואנליטית (88-826)
שם המרצה: פרופ' מיכאל כץ
סמסטר ב', מועד א': 25.07.12

<u>יש לנמק ולהצדיק את כל התשובות.</u>
<u>משך הבחינה: שלוש שעות.</u>

1. השעלה הזאת עוסקת בדריבציות.
א. הגדר מושג של דריבציה בנקודה $p \in \mathbb{R}^3$.
ב. חשב את מימד של מרחב של דריבציות של מרחב של פונקציות מוגדרות בסביבה של ראשית הצירים $p=0$ במרחב אויקלידי תלת-מימדי.

2. תהי C עקומה במישור (x,z) מוגדרת על ידי משוואה $(x-3)^2+z^2=4$. יהי $M \subseteq \mathbb{R}^3$ משטח סיבוב המתקבל על ידי סיבוב של C מסביב לציר- z, עם פרמטריזציה $x(\theta,\phi)$.
א. מצא מקדמים של תבנית יסודית ראשונה ושניה של M ועקמומיות Gauss $K=K(\theta,\phi)$ של M.
ב. בטא באמצעות (θ,ϕ) מתי ועקמומיות Gauss היא חיובית.
ג. בטא באמצעות קאוארדינטות (x,y,z) מתי ועקמומיות Gauss היא אפס.
ד. חשב את פרמטר τ של M.

3. הביטוים הבאים משתמשים בסימון חיבור של Einstein. לבטא באמצעות $L_{i,j}, L^i{}_j, \Gamma^k_{ij}$ ולפשט ככל האפשר את הביטוים הבאים:
א. $\left\langle x_{\ell j}, n_k \right\rangle (\delta^k{}_m) g^{m\ell}$.
ב. $\left\langle x_j, x_{pq} \right\rangle (\delta^j{}_r)$.
ג. $\left\langle x_{pqr}, x_m \right\rangle$.
ד. $\delta^a{}_b g_{ca} g^{bd} \delta^c{}_d$

4. יהי $\rho > 0$ מספר ממשי. תהי $f(x,y)=\left(\alpha y\right)^{-1}$ ונתבונן במטריקה הבאה: $f(x,y)^2\left(dx^2+dy^2\right)$ במישור (x,y).
א. תנו ארבעה שיטות חישוב של עקמומיות Gauss של מטריקה של משטח במרחב $\mathbb{R}^3$.
ב. להבהיר איזה מהשיטות חלים לגבי מטריקה $f(x,y)^2\left(dx^2+dy^2\right)$.
ג. חשב את עקמומיות Gauss של מטריקה $f(x,y)^2\left(dx^2+dy^2\right)$.

5. יהי טורוס $T^2=\mathbb{C}/L$.
א. הגדר פרמטר $\tau(T^2)$ ותחום יסודי סטנדרטי.
ב. הסבר באופן גאומטרי מתי $\tau(T^2)$ הוא מדומה טהור ומצא תחום יסודי לטורוס T^2 במקרה הזה.
ג. בטא משפט פוביני לגבי פונקציות במישור.
ד. השטמש במשפט פוביני כדי להוכיח את אי-שיוון $sys^2 < area$ במקרה של טורוס עם פרמטר $\tau(T^2)$ מדומה טהור.

בהצלחה!