דיפרנציאלית ב - תרגיל 3

1. $u = \langle \overset{\mathbb{R}}{\underset{\Downarrow}{}} u_n : n \in \mathbb{N} \rangle$, $[u] \in \mathbb{R}^*$

א) $u_n = \frac{n+1}{n}$.

נוכיח שעבור $r=1$ מתקיים ש- $\overset{!}{r}$ הוא אינפיניטסימלי קרוב ל-$[u]$

__הוכחה:__ $\mathbb{R}^*$ זה הרחבה של $\mathbb{R}$ וראינו כבר שיש שיכון

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^*$$

כאשר $r \longmapsto \langle r, r, r, \dots \rangle$

לכן בעצם צ"ל ש- $[u] - [\langle 1,1,1,\dots \rangle] =$ מס' אינפיניטסימלי

צ"א צ"ל: $[\langle \frac{n+1}{n} - 1 : n \in \mathbb{N} \rangle] =$ מס' אינפיניטס'

צ"א צ"ל: $[\langle \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \rangle] =$ מס' אינפיניטסימלי.

__הוכחה:__ בעצם צ"ל שלכל $0<q$: $[\langle \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \rangle] < [\langle q, q, \dots \rangle]$

צ"א ש- $\{n : \frac{1}{n} < q\} \in F$

$\{n : \frac{1}{q} < n\} \in F$

יש רק מס' סופי של n __שלא__ מקיים זאת ולכן זו קבוצה קו-סופית וכיוון שכל מסנן __ראשי__ מכיל את הקבוצות הקו-סופיות אזי אכן $\{n : \frac{1}{q} < n\} \in F$

__הלא-ראשי__

משפט ■

ב) $u_n = \frac{n+1}{n^2}$

נוכיח שעבור $r=0$ מתקיים ש- r אינפיני' קרוב ל-$[u]$

כמו בסעיף א $0 \longleftrightarrow \langle 0, 0, \dots \rangle$

בדק

וננכיח

הוכחה:

$$[u]-[\langle 0,0,0,\dots\rangle] = \text{אינפיניטסימלי}$$

$$\underbrace{[u]-[\langle 0,0,0,\dots\rangle]}_{\|} \quad [\langle \tfrac{n+1}{n^2}\rangle] = \underbrace{[\langle \tfrac{1}{n^2}\rangle]}+\underbrace{[\langle \tfrac{1}{n}\rangle]}$$

כבר הוכחנו שהוא אינפיניט' בסעיף א'

גם הוא אינפיניטסימלי כי:

$$[\langle \tfrac{1}{n^2}\rangle] = \underbrace{[\langle \tfrac{1}{n}\rangle]}\cdot\underbrace{[\langle \tfrac{1}{n}\rangle]}$$

הוכחנו ב- (א) שהם אינפיניט' ומכפלה של אינפיניטסימלים היא אינפיניטסימלית

חיבור של אינפיניטסימלים הוא אינפיניטסימלי

מש"ל ■

(ב) $u_n=\frac{n^2+1}{n}$. נוכיח שלא קיים r כדרוש

הוכחה: נניח בשלילה שקיים $r\in\mathbb{R}$ כך ש- r אינפיניטסימלי קרוב ל- $[u]$

אזי

$$\varepsilon : \overset{\text{נתון}}{=} \underbrace{[u]-[\langle r,r,r,\dots\rangle]}_{\|} = \text{אינפיניטסימלי}$$

$$[\langle \tfrac{n^2+1}{n}-r\rangle]$$

$$\|$$

$$[\langle n-r\rangle]+\underbrace{[\langle \tfrac{1}{n}\rangle]}$$

הוכחנו בסעיף א' שזה אינפיניטסימלי.

אם ε היה אינפיניטסימלי אז גם $[\langle n-r\rangle]$ היה אינפיניטסימלי

אבל $[\langle n-r\rangle]$ לא אינפיניטסימלי עפ"י (*) למטה

סתירה!

מש"ל ■

(*) נוכיח ש- $[\langle n-r\rangle]$ לא אינפיניטסימלי ע"י שנראה ש-

$$[\langle 1,1,\dots\rangle] < [\langle n-r\rangle]$$

$$\{n:\ 1<n-r\}\in F$$

כל

צ"ל $\{n\in\mathbb{N} : n > 1-r\} \in F$

כיוון ש-r קבוע אז יש רק מס' סופי של n שלא מקיימים זאת ולכן זו קב' קו-סופי ולכן אכן שייכת ל- F

מש"ל ■

2. $A\subset\mathbb{R}$ קב' סופית. צ"ל $A={}^*A$

הוכחה:

נסמן $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$.

אז $A=\{x\in\mathbb{R} : (x=a_1)\vee(x=a_2)\vee\dots\vee(x=a_n)\}$

עפ"י עקרון ההעברה

${}^*A=\{x\in{}^*\mathbb{R} : (x=a_1)\vee\dots\vee(x=a_n)\}$

$=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}=A$

מש"ל ■

3. **רפלקסיביות:** ניקח $u=\langle u_n\rangle$. $[u]\in{}^*\mathbb{R}$

ונוכיח $[u]\approx[u]$

צ"ל $[u]-[u]=$ מס' אינפיניטסימלי.

$[u]-[u]=[\langle 0,0,\dots\rangle]$

וזה בעצם 0

כי $[\langle 0,0,\dots\rangle]\longleftrightarrow 0$ והוא מס' אינפיניטסימלי.

סימטריות: $u=\langle u_n\rangle$, $v=\langle v_n\rangle$. $[u],[v]\in{}^*\mathbb{R}$

אזי:

$$[u]\approx[v]$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$[u]-[v]=\text{אינפיניטסימלי}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$[\langle u_n-v_n\rangle]=\text{אינפיניטסימלי}$$
$$\Longleftrightarrow$$

כי ההכפלה של מס' אינפי' במס' סופי זה עדיין אינפיניטסימלי

$$-[\langle u_n-v_n\rangle]=\text{אינפיניטסימלי}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$[\langle v_n-u_n\rangle]=\text{אינפיניטסימלי}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$[v]\approx[u]$$

בס"ד

טרנזיטיביות: $U=\langle U_n\rangle$, $V=\langle V_n\rangle$, $W=\langle W_n\rangle$, $[U],[V],[W]\in {}^*\mathbb{R}$

$$[U]\approx[V] \ \wedge\ [V]\approx[W]$$

$$\Downarrow$$

$[U]-[V]=$ אינפיניטסימלי $\ \wedge\ $ $[V]-[W]=$ אינפיניטסימלי

חיבור של אינפיניטסימלים הוא אינפיניטסימלי $\Downarrow$

$[U]-\cancel{[V]}+\cancel{[V]}-[W]=$ אינפיניטסימלי

$$\Downarrow$$

$[U]-[W]=$ אינפיניטסימלי

$$\Downarrow$$

$$[U]\approx[W]$$

מש"ל

4 צ"ל $\{x : x\approx b\} = \{b+\varepsilon : \varepsilon\in I\}$ ← האינפיניטסימלים

(דיברתי איתך ואמרת לי שזו בעצם השאלה)

הוכחה: $\approx$ זה בעצם "being infinitely close"

ולכן

$$\{x : x\approx b\} = \{x : \exists\varepsilon\in I \quad x=b+\varepsilon\}$$
$$= \{b+\varepsilon : \varepsilon\in I\}$$

מש"ל

5 נניח: $x\approx y$, b סופי. F מסנן על

$x=[U]$, $y=[V]$

אז $[U]-[V]=$ אינפיניטסימלי מס'

ז"א: לכל $0<r\in\mathbb{R}$ $\left(\begin{array}{l}\mathbb{R}\hookrightarrow {}^*\mathbb{R}\\ r\to[\langle r,r,\ldots\rangle]\end{array}\right)$ מתקיים

$$\{n : U_n-V_n<r\}\in F$$

כעת, נוכיח $bx\approx by$:

בעצם צ"ל שלכל $0<r\in\mathbb{R}$ מתקיים

(*) $\{n : bU_n-bV_n<r\}\in F$ ← condition on n should be stated in terms of real numbers but b may not be real

בס"ד

א"צ צ"ל $\{n : u_n - v_n < \frac{r}{b}\}$

וזה ע"פ (*) בעמ' קודם אכן נכון, כי (*) בעמ' קודם

נכון לכל $0<r\in\mathbb{R}$. ועבור b סופי $\frac{r}{b}$ אכן מקיים $0<\frac{r}{b}\in\mathbb{R}$

not necessarily, if b is not real

מש"ל

זה לא בהכרח נכון עבור b אינסופי:

לדוג':

יהי ε מס' אינפיניטסימלי.

$x=\varepsilon$, $y=\varepsilon^2$, $b=\frac{1}{\varepsilon}$

אז $x\approx y$ (כי $x-y=\varepsilon-\varepsilon^2=$ אינפיניטסימלי
חיסור של אינפיניטסימלי הוא אינפיניטסימלי)

ו- b אכן אינסופי.

אבל
$$bx=1, \quad by=\varepsilon$$
והם לא שקולים אינפיניטסימלית. $\not\approx$

(כי ε הוא אינפיניטסימלי
אבל 1 הוא ממשי $\neq 0$ ולכן לא אינפיניטסימלי)

6. (א) ε אינפיניטס' $\Rightarrow \sin\varepsilon\approx 0$

[משפט מההרצאה: f ממשית רציפה $\Longleftrightarrow$ f^* מיקרו רציפה
א"ז $x\approx x' \Rightarrow f(x)\approx f(x')$]

Here a somewhat more precise statement is needed since uniform continuity can also be characterized in terms of microcontinuity as discussed in class. For example, you could specify that you are talking about continuity at a given real $x\in\mathbb{R}$.

הוכחה:
ידוע מאינפי' ש- $f(x)=\sin x$ היא פונק' ממשית רציפה.

ולכן ע"פ המשפט הנ"ל f^* מיקרו רציפה
בנוסף, $\varepsilon\approx 0$

$$f(\varepsilon)\approx f(0)$$
$$\Downarrow$$
$$\sin(\varepsilon)\approx\sin(0)=0$$

מש"ל

Strictly speaking the problem asked to use transfer of properties of real functions but this solution is also correct.

a continuous f may fail to be microcontinuous at a hyperreal point eg x^2 at an infinite point

[illegible]

ב) צ"ל עבור ε אינפיניט' $1 \approx \cos\varepsilon$.

<u>הוכחה:</u> עפ"י אינפי' $f(x)=\cos x$ פונקציה רציפה

ועפ"י משפט מספר קודם ($\star$) אזי $f^*(x)$ מיקרו רציפה

ולכן כיוון ש- $\varepsilon \approx 0$ אז $f(\varepsilon) \approx f(0)$

$\rightarrow \cos(\varepsilon) \approx \cos(0) = 1 \leftarrow$ same remark as above

מש"ל ■

ג)

$$\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\overbrace{\sin\varepsilon - \sin 0}^{\Delta y}}{\underbrace{\varepsilon - 0}_{\Delta x}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \sin'(\varepsilon) =$$

this should be 0.

$$= \cos(\varepsilon) = 1$$

לפי סעיף ב

this is not strictly speaking equality but rather only approximate equality $\approx$

מש"ל ■

ז   בס"ד

7. ידוע מאינפי 1 שב- $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ מתקיים

$$(\forall r\in\mathbb{R})(\forall\varepsilon\in\mathbb{R})(\varepsilon>0)(\exists q\in\mathbb{Q}) : (|r-q|<\varepsilon)$$

ולכן ע"פ עקרון ההעברה

$$(\forall r\in{}^*\mathbb{R})(\forall\varepsilon\in{}^*\mathbb{R})(\varepsilon>0)(\exists q\in{}^*\mathbb{Q}) : (|r-q|<\varepsilon)$$

← וזה בפרט נכון עבור ε אינפיניטסימלי ולכן קיים $q\in{}^*\mathbb{Q}$ כך ש-

$$q\approx r$$

מש"ל ■

8. L = היפר ממשיים סופיים. I - אינפיניטסימלים

צ"ל:

$$\mathbb{R}\simeq {}^*\mathbb{Q}\cap L \big/ {}^*\mathbb{Q}\cap I$$

הוכחה: נגדיר הומומורפיזם כל מס' $r\in\mathbb{R}$ ניתן לרשום בפיתוח עשרוני אינסופי

$$r=\underbrace{a_1a_2\cdots a_n.\,a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{H-1}a_H}_{\text{זהו מספר היפר-ממשי סופי}}a_{H+1}\cdots$$

(כאשר H מס' אינסופי)

I think you mean "hyperrational"

כי ניתן לרשום אותו בתור מנה של שני היפר טבעיים

$$a_1a_2\cdots a_n.\,a_{n+1}\cdots a_H=\frac{a_1a_2\cdots a_na_{n+1}\cdots a_H}{10^{H-n}}$$

sloppy

כעת כיוון שהצגה $(a_{H+1}\cdots)$ הוא מס' אינפיניטסימלי

אז ניתן להסתכל עד כדי מס' אינפיניטסימליים ונשלח את r למחלקת שקילות הבאה

$$r\longmapsto[a_1\cdots a_n.\,a_{n+1}\cdots a_H]\in {}^*\mathbb{Q}\cap L\big/{}^*\mathbb{Q}\cap I$$

$\boxed{\text{ברור}}$ שזה אכן הומומורפיזם חח"ע ועל ולכן איזומורפיזם!

elaborate on injectivity