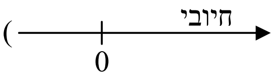
גיאומטריה אקסיומטית

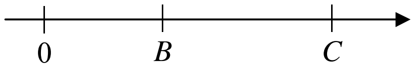
הבדל עקרי בין גיאומטריה פרוז'קטובית לאוקלידית: בפרוז'קטיבית – קיום מקבילים נפגשים בנקודה – באינסוף.

$\mathbb{R}$ - מספרים ממשיים $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ניקח ישר ונקבע כיוון חיובי (מקובל 

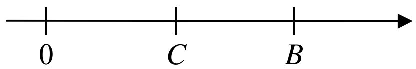
)

המרחק המכוון - BC

1) אם C אחרי B, בכיוון החיובי, אז $BC = |BC|$



2) אם C בכיוון השלילי מְ- B אז $BC = -|BC|$



מנה $\frac{BD}{DC}$ (B,C,D שונות)

1) אם D בין B ל- C (לא חשוב באיזה כיוון) אז $\frac{BD}{DC} > 0$

2) אם D מחוץ לקטע BC אז $\frac{BD}{DC} < 0$

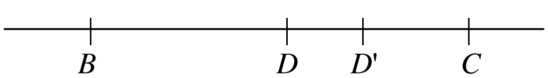
למה 1: $\frac{BD}{DC} = \frac{BD'}{D'C} \Leftrightarrow D = D'$ (למה זו נותנת אפשרות להוכיח ששתי נקודות שוות ע"י בדיקת מרחקים ז"א מקבלים אפשרות להראות זהות גיאומטרית ע"י בדיה אלגברית.

הוכחה: ע"י חלוקה למרחקים (נוכיח רק חלק מהמרחקים להדומה). – (ברור שאם D בפנים ו'D מחוץ ל-BC אז $D \neq D'$ ומנה אחת שלילית ואחת חיובית)

1. נבדוק את המקרה ש D, D' בתוך הקטע BC (נניח $D \neq D'$) ונניח שֶׁ $|BD| < |BD'|$

$\Leftarrow$ $|DC| < |D'C|$ (כי $|BD'| + |D'C| = |BC| = |BD| + |DC|$

$\Leftarrow$ $\frac{|BD|}{|DC|} < \frac{|BD'|}{|D'C|}$ $\Leftarrow$ $\frac{|BD|}{|DC|} \neq \frac{|BD'|}{|D'C|}$ מש"ל



אם D, D' שווים אז ברור שֶׁ $\frac{BD}{DC} = \frac{BD'}{D'C}$.

סוף

זה נותן לנו העתקה מישר ℓ שתלויה ב $B'C$: $\ell \to \overline{\mathbb{R}}$ ע"י: $B \to 0$; $C \to \infty$ $D \to \frac{BD}{DC}$ $(D \neq B, C)$

כאשר $D \to \infty$ $\frac{BD}{DC} < 0$ וְ $|BD| \approx |DC|$

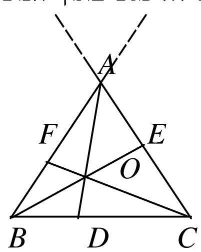
ולכן $\frac{|BD|}{|DC|}\approx 1$

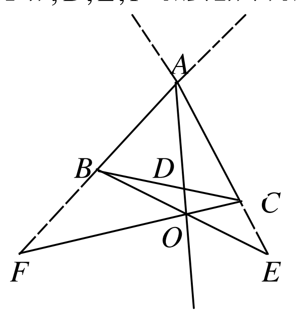
כלומר $\frac{BD}{DC}\to -1$ ובכיוון $\to 1^{+}$ בכיוון $\to 1^{-}$

משפט צ'בה ומשפט מנלאוס

משפט צ'בה (הוכחה טומס צ'בה Thomas Ceva) CEVA

המשפט נותן תנאים מתי ישרים שיוצאים מקודקודים נפגשים בנקודה אחת.
מציירים משולשים וקובעים 3 נקודות דל הצלעות D,E,F, הישרים חייבים להיפגש בתוך המשולש.

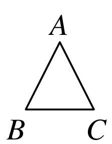




- יהא A,B,C משולש
נניח ש D נקודה על הישר BC
E נקודה על הישר CA
ו- F נק' על הישר AB

אזי AD, BE ו-CF נפגשים בנקודה אחת אם ורק אם $\left(\frac{BD}{DC}\right)\cdot\left(\frac{CE}{EA}\right)\cdot\left(\frac{AF}{FB}\right)=1$ (*)

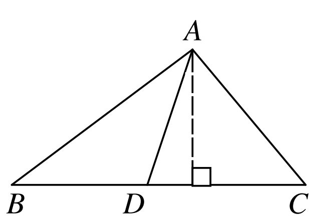
<u>**הוכחה**</u> $\Leftarrow$ ז"א AD, BE, CF נפגשות בנקודה אחת D $\Leftarrow$
אז המכפלה מקיימת $\left(\frac{BD}{DC}\right)\cdot\left(\frac{CE}{EA}\right)\cdot\left(\frac{AF}{FB}\right)=1$



נעשה את זה בעזרת שטחים. נצטרך לעבוד עם סימנים, ז"א גם להגדיר שטח שלילי של משולש, ושטח חיובי.
שטח של משולש: אם ABC קודקודים של משולש בכיוון נגד השעון אז השטח $\triangle ABC$ חיובי.
אם סגר הקודקודים A, B, C הוא עם כיוון השעון אז השטח $\triangle ABC = -\frac{1}{2}bh$

<u>**למה 2**</u> יהא ABC משולש ו-D נקודה על הישר BC. ואם ל- $\triangle ABD$ ואם ל- $\triangle ADC$ אותו גובה:

טענה $\frac{\triangle ABD}{\triangle ADC}=\frac{BD}{DC}$, קודם נבדוק ערך מוחלט

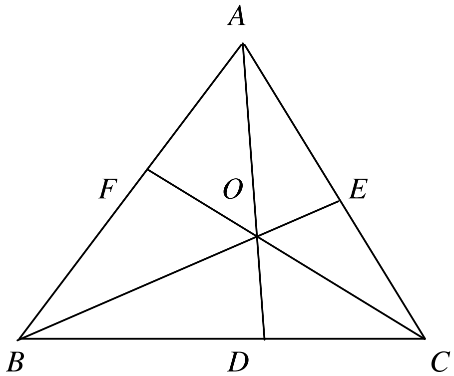


הוכחה ברור שזה מתקיים הערך מוחלט $\frac{|\triangle ABD|}{|\triangle ADC|}=\frac{\frac{1}{2}\cancel{h}|BD|}{\frac{1}{2}\cancel{h}|DC|}$

ונשארנו רק עניין הסימון. השאלה היא מתי הם בכיוון השעון ומתי נגד, זה בעצם תלוי איפה D נמצא.
אם $D\in B-C$ אז שניהם חיוביים. אם $D\notin B-C$ אז המנות שליליות.
ומכאן אפשר לתרגם מכפלה של מנות למכפלה של שטחים.

סוף

כאמר אפשר לצייר מפגש או ש- O בחוץ או בפנים.



כי במשולש

OBC הלמה מתקיימת $\frac{BD}{DC}=\frac{\triangle ABD}{\triangle ADC}=\frac{\triangle OBD}{\triangle ODC}$

בצורה זהה.

<u>הערה</u> יש כלל בשברים, אם $\frac{r}{s}=\frac{p}{q}$ אז $\frac{p}{q}=\frac{r}{s}=\frac{p+r}{q+s}=\frac{p-r}{q-s}$

$$\Rightarrow \frac{\triangle ABC}{\triangle ADC}=\frac{\triangle OBD}{\triangle ODC}=\frac{\triangle ABD-\triangle OBD}{\triangle ADC-\triangle ODC}=\frac{\triangle ABO}{\triangle CAO}\Rightarrow \boxed{\frac{BD}{DC}=\frac{\triangle ABO}{\triangle CAO}}$$

עושים פרמוטציה ציקלית

$$\boxed{\begin{array}{ccc} O \circlearrowleft & \begin{array}{c} D \\ \swarrow \ \nwarrow \\ E \rightarrow F \end{array} & \begin{array}{c} A \\ \swarrow \ \nwarrow \\ B \rightarrow C \end{array} \end{array}}$$

אז כדי להתאים לאחרים $\boxed{\frac{AF}{FB}=\frac{\triangle CAO}{\triangle BCO}}$ $\boxed{\frac{CE}{EA}=\frac{\triangle BCO}{\triangle ABO}}$

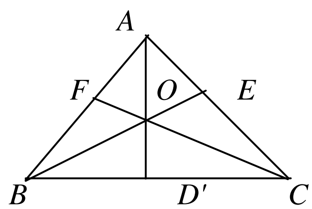
וקיבלנו 3 נוסחאות ואם נבדוק המכפלה $\left(\frac{BD}{DC}\right)\cdot\left(\frac{CE}{EA}\right)\cdot\left(\frac{AF}{FB}\right)=\frac{\cancel{\triangle ABO}}{\cancel{\triangle CAO}}\cdot\frac{\cancel{\triangle BCO}}{\cancel{\triangle ABO}}\cdot\frac{\cancel{\triangle CAO}}{\cancel{\triangle BCO}}\Rightarrow 1$

ואמרנו את הכיוון.

$\Rightarrow$נניח ש (*)=1, צ"ל ש AD, BE, CF נפגשים בנקודה אחת.

נגדיר O להיות נקודת החיתוך של BE, CF , נמשיך ישר

נ A דרך O ונגדיר D' להיות נקודת החיתוך של AO עם הישר BC.



לפי החלק של משפט צ'בה שהוכחנו, יוצא שהמכפלה הבאה מתקיימת: $\frac{BD'}{D'C}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$

לפי ההנחה יש עוד נקודה D כך ש $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$

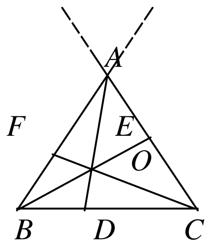
אם נשווה אחד לשני יוצא $\frac{BD'}{D'C}\cdot\cancel{\frac{CE}{EA}}\cdot\cancel{\frac{AF}{FB}}=\frac{BD}{DC}\cdot\cancel{\frac{CE}{EA}}\cdot\cancel{\frac{AF}{FB}}$ $\quad \frac{BD'}{D'E}=\frac{BD}{DE}$

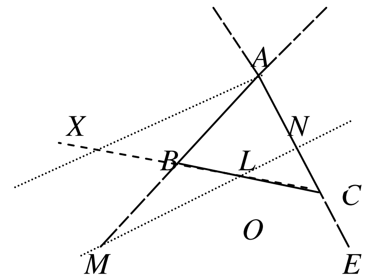
לפי למה 1 $D=D'$ מנ"ט

סוף

משפט מנלאוס (מתמטיקאי הלניסטי מצרי)

המשפט נותן תנאים מתי נקודות על הישרים של משולש קוליניאריות.
מציירים משולשים וקובעים 3 נקודות דל הצלעות D, E, F , הישרים חייבים להיפגש בתוך המשולש.





- יהא A, B, C משולש
נניח ש L נקודה על הישר BC
M נקודה על הישר CA
ו- N נק' על הישר AB

אזי L , M ו-N קוליניאריות אם ורק אם $\left(\frac{BL}{LC}\right)\cdot\left(\frac{CM}{MA}\right)\cdot\left(\frac{AN}{NB}\right)\overset{\Leftrightarrow}{=}-1$ (*)

הוכחה $\Leftarrow$: נניח ש- L, M, N קוליניאריות ונציין ב- את נקודת החיתוך של הישר דרך A מקביל ל-LMN עם הישר BC . לפי משולשים דומים נקבל: $\frac{CM}{MA}=\frac{CL}{LX};\frac{AN}{NB}=\frac{XL}{LB}$

לכן נקבל

$$\left(\frac{BL}{LC}\right)\cdot\left(\frac{CM}{MA}\right)\cdot\left(\frac{AN}{NB}\right)=\left(\frac{BL}{LC}\right)\cdot\left(\frac{CL}{LX}\right)\cdot\left(\frac{XL}{LB}\right)=-1$$

$\Rightarrow$: נניח שמתקיים $\left(\frac{BL}{LC}\right)\cdot\left(\frac{CM}{MA}\right)\cdot\left(\frac{AN}{NB}\right)=-1$. נגדיר L' להיות נקודת החיתוך של הישרים BC ו- MN. לפי החלק הראשון מתקיים $\left(\frac{BL'}{L'C}\right)\cdot\left(\frac{CM}{MA}\right)\cdot\left(\frac{AN}{NB}\right)=-1$. כמו בהוכחה של משפט צ'בה, נוכל לבטל את המנות המשותפות ולקבל $\left(\frac{BL}{LC}\right)=\left(\frac{BL'}{L'C}\right)$. לפי למה 1, $L=L'$. מש"ל.