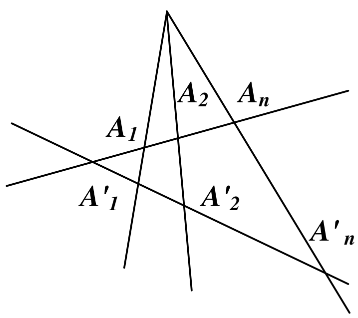
גיאומטריה אקסיומתית –הרצאה 2

משפטי צ'בה ומנלאוס היו הגיאומטריה אוקלידית, כי היה לקטע אורך וזה רק באוקלידית. בגיאומטריה פרוז'קטיבית אין קטעים עכשיו נוכיח משפטים שמעבירים בין אוקלידית לפרוז'קטיבית.
ז"א צ'בה ומנלאוס משיירים רק לגיאומטריה אוקלידית.
דסרג, פפוס – גיאומטריה אוקלידית, פרוז'קטיבית
Desargues ↙
צרפתי יווני מצרי

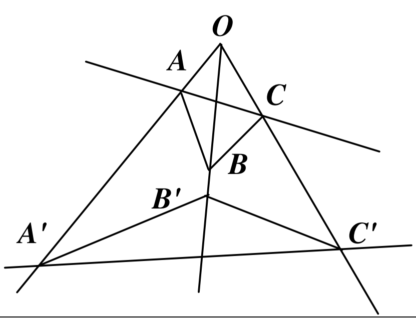
<u>יש גיאומטריות:</u>
אוקלידית
אפינית
פרוז'קטיבית
היפרבולית

<u>הגדרה:</u> יהיו $\left\{ \begin{array}{l} A_1, A_2, A_3, \ldots A_n \text{ על ישר } \ell \\ A'_1, A'_2, A'_3, \ldots A'_n \text{ על ישר } \ell' \end{array} \right\}$ נגיד ש $A_1, \ldots A_n$ בפרספקטיבה עם $A'_1, \ldots A'_n$ מנקודה O, אם הישרים $A_1A'_1, A_2A'_2, \ldots, A_nA'_n$ נפגשים בנקודה O.

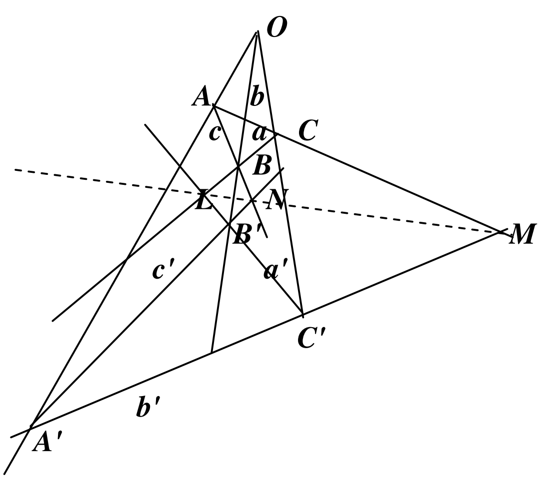
(זה בסיס הטלה של נקודות מישר אחד לישר אחר דרך מוקד O.)

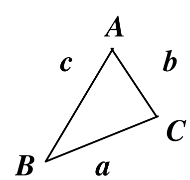


<u>הגדרה:</u> שני משולשים $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ הם בפרספקטיביה מנקודה O אם AA', BB', CC' נפגשים בנקודה O.



<u>הגדרה:</u> שני משולשים $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ הם בפרספקטיביה מישר אם $a \cap a' = L$, $b \cap b' = M$, $c \cap c' = N$ הן על ישר אחד





משפט דסרג: אם שני משולשים $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ הם בפרספקטיבה מנקודה O

אז הם בפרספקטיבה מישר ז"א $L = BC \cap B'C'$ הן קולינאריות

נוסח אחר כמשפט אוקלידית $M = CA \cap C'A'$

$N = AB \cap A'B'$

<u>הוכחה:</u> הוכחה דרך משפט מנלאוס.

① על המשולש $\triangle CAO$ והישר $MA'C'$ (M חייבת להיות הישר $A'C'$ כי $M = A'C' \cap AC$)

ואז לפי משפט מנלאות חייב להיות $\frac{CM}{MA} \cdot \frac{AA'}{A'O} \cdot \frac{OC'}{C'C} = -1$

② על המשולש $\triangle ABO$ והישר $NB'A'$ $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BB'}{B'O} \cdot \frac{OA'}{A'A} = -1$

③ על המשולש $\triangle BCO$ והישר $LC'B'$ $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CC'}{C'O} \cdot \frac{OB'}{B'B} = -1$ פה ↖ לכל זוג (-1), סה"כ $(-1)^6$

אם נכפיל את כל משוואות נקבל $\frac{CM}{MA} \cdot \frac{\cancel{AA'}}{A'O} \cdot \frac{\cancel{OC'}}{\cancel{C'C}} = -1$

$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{\cancel{BB'}}{\cancel{B'O}} \cdot \frac{OA'}{\cancel{A'A}} = -1 \to -1$ ורפט

כיון שהמכפלה נתקבל ש: $\frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} = -1$ $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{\cancel{CC'}^{-1}}{\cancel{C'O}} \cdot \frac{\cancel{OB'}}{\cancel{B'B}} = -1$

מצטמצמת ויש 6 פעמים -1

ולכן לפי משפט מנלאוס

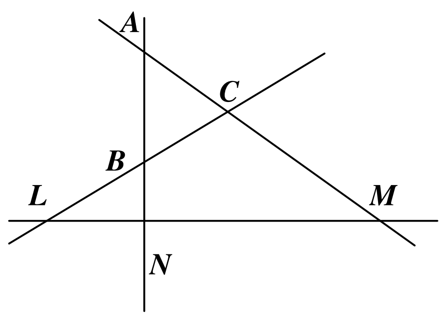
מתקבל ש L, M, N קולינאריות קיבלנו $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$

שזה משפט מנלאוס לבנר.

$D = L$

$E = M$

$F = N$



סוף

משפט פפוס: אם A, B, C שלוש נקודות על ישר ℓ

ו A', B', C' שלוש נקודות על ישר ℓ'

ונגדיר $L = BC' \cap B'C$

$M = CA' \cap C'B$ אז N, M, L קולינאריות

$N = AB' \cap A'B$

<u>הוכחה:</u> נגדיר $X = AB' \cap CA'$

$Y = BC' \cap AB'$

$Z = CA' \cap BC'$

נפעל משפט מנלאוס

① YZX והישר LCB' $\quad \frac{YL}{LZ} \cdot \frac{ZC}{CX} \cdot \frac{XB'}{B'Y} = -1$

② ZYX והישר MAC' $\quad \frac{ZM}{MX} \cdot \frac{XA}{AY} \cdot \frac{YC'}{C'Z} = -1$

③ XYZ והישר NBA' $\quad \frac{XN}{NY} \cdot \frac{YB}{BZ} \cdot \frac{ZA'}{A'X} = -1$

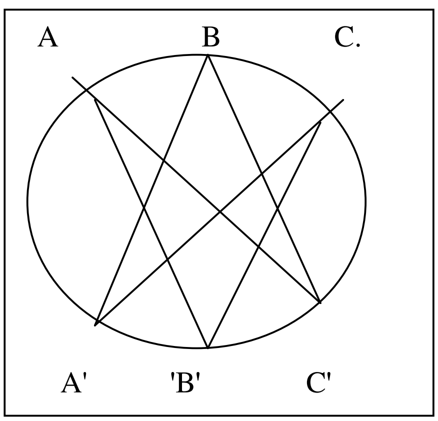
-1 -1 ||

שוב נכפיל את כל המשוואות = -1

שתי העמודות האחרונות שוות ל- -1 לפי משפט מנלאוס N, M, L קוליניאריות

<u>סוף</u>

$\boxed{}$



צריך להוכיח מקרה מיוחד של משפט פפוס.

<u>משפט פסקל</u> אם A,B,C וְ A',B',C' שש נקודות על מעגל $\mathbb{C}$ אז הנקודות

$L = BC \cap B'C'$

$M = CA \cap C'A'$ הן קולינאריות (מניחים שהקווים הם לא מקבילים)

$N = AB \cap A'B'$

הוכחה כמו במשפט פפוס

נגדיר
$$X = AB' \cap CA'$$
$$Y = BC' \cap AB'$$
$$Z = CA' \cap BC'$$

אז כמו בהוכחה של פפוס אנו מקבלים שלוש משוואות.

$$\frac{YL}{LZ}\cdot\frac{ZC}{CX}\cdot\frac{XB'}{B'Y} = -1$$

$$\frac{ZM}{MX}\cdot\frac{XA}{AY}\cdot\frac{YC'}{C'Z} = -1$$

$$\frac{XN}{NY}\cdot\frac{YB}{BZ}\cdot\frac{ZA'}{A'X} = -1$$

רוצים להוכיח שהעמודה השמאלית 1- ולכן מה שבמלבן צריך להיות 1, נסדר מחדש כך ש- Z, Y, X בנפרד.

עלינו להוכיח שהמכפלה הבאה שווה 1
$$\left(\frac{XB'}{CX}\cdot\frac{XA}{AX'}\right)\cdot\left(\frac{YC'}{AY}\cdot\frac{YB}{B'Y}\right)\cdot\left(\frac{ZA'}{BZ}\cdot\frac{Z'C}{C'Z}\right)$$

נסתכל על זה גאומטרית, מספיק להוכיח שכל החלקים השונים שווים ל- 1.

לפי משולשים דומים $\triangle AXC \sim \triangle B'XA'$ (זוויות קודקודיות וזוויות שנשענות על אותה קשת).

לכן $XA'\cdot XC = XB'\cdot XA$

או $A'X\cdot CX = B'X\cdot AX$ $\Leftarrow$ $\frac{XB'}{CX}\cdot\frac{XA}{A'X} = 1$

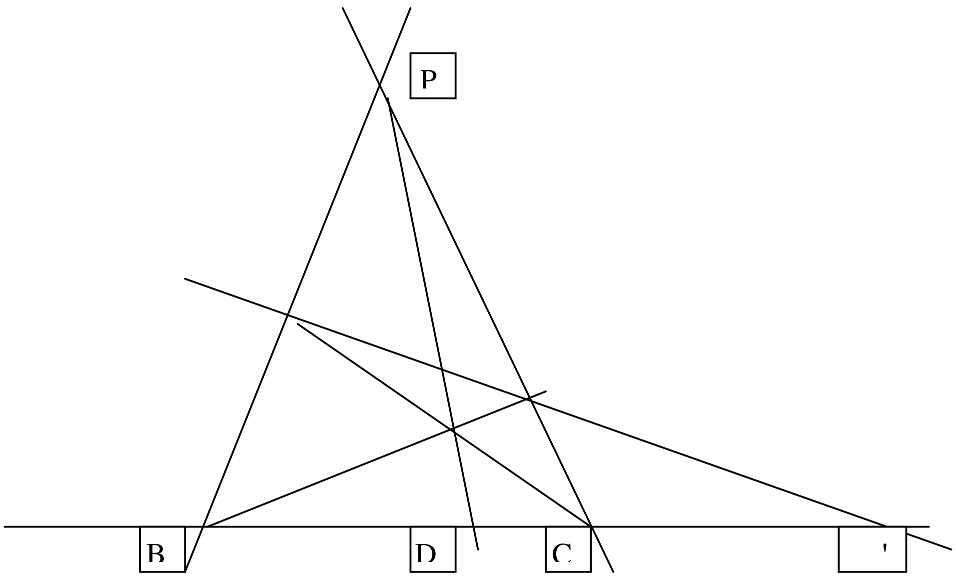
ולפי הפרמוטציה ציקלית מקבלים גם ששני המוכפלים האחרים שווים ל- 1 וסה"כ המכפלה של שתי העמודות הימיניות היא $1\cdot1\cdot1 = 1$.

ולכן $\frac{XL}{LZ}\cdot\frac{ZM}{MX}\cdot\frac{XN}{NY} = (-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = -1$ ואז לפי מנלאוס L, M, N קולינאריות.

סוף

נקודות הרמוניות:

אם B, C, D נקודות שונות, אז בעזרת צ'בה ומנלאוס, אפשר למצוא נקודה אחת ויחידה על הישר BC כך ש- $\frac{BD}{DC} = -\frac{BD'}{D'C}$. אפשר למצוא אותו על ידה בניה פשוטה של ארבע-זוויות שלם.
ארבע נקודות B, C, E, F שכל שלוש לא קולניאריות מגדירות שש ישרים ושלוש נקודות אלקסוניות P, Q, R. אם R על BC אז הוא נקודה הרמונית ל $BC \cap PQ$. אפשר לבחור את F, E כך ש- $D = BC \cap PQ$



הישר הפולרי

הגדרה: יהא $\mathbb{C}$ מעגל וְ- O נקודה כך שֶׁ- $O \notin \mathbb{C}$ (לא על המעגל)

נוציא 3 ישרים מ- O שחותכים את $\mathbb{C}$ בנקודות

$A'A$, $B'B$, $C'C$ אז ישר הפסקל של נקודות ABC וְ- $A'B'C'$

נקרא הישר הפולרי של O. נקרא לישר o.