בס"ד

גיאומטריה אקסיומתית –הרצאה 4

<u>אקסיומות לגיאומטריה פרוייקטיבית</u>

<u>עצמים בלתי מוגדרים:</u> "נקודה", "ישר", יחס "על" בין נקודות וישרים.

P.0 היחס "על" סימטרי. ז"א, A "על" m אא"ם m "על" A

P.1 על שני ישרים שונים ℓ, m יש לפחות נקודה אחת.

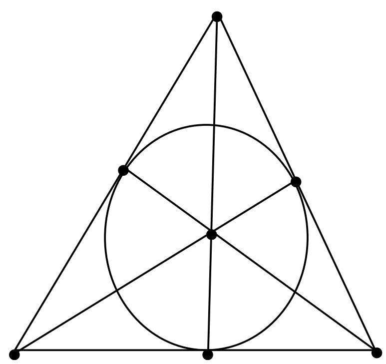
P.2 על שני ישרים שונים אין יותר מנקודה אחת.

P.3 על שתי נקודות שונות A,B יש לפחות ישר אחד.

P.4 קיימות לפחות שלוש נקודות על כל ישר.

P.5 יש לפחות 3 נקודות שאינם על ישר אחד.

דוגמה: גיאומטריה של 7 נקודות



הדואלי למשפט בגיאומטריה פרוייקטית הוא המשפט שמתקבל כאשר מחליפים נקודות וישרים (ומתקנים את הדקדוק.

כעת נוכיח שהמשפטים הדואליים לכל אקסיומה מתקיימים. $P.1$ **דואלי ל-** $P.3$

<u>משפט 1:</u> (דואלי ל- $P.2$) על שתי נקודות שונות אין יותר מישר אחד.

<u>הוכחה:</u> נניח ש A,B נקודות שונות ו m,ℓ ישרים על A,B אז $m \neq n$ זה סתירה, ל- $P.2$.

<u>למה 1:</u> אם ℓ ישר ו A נקודה לא על ℓ אז יש התאמה חח"ע ועל בין נקודות על ℓ לישרים על A.

<u>הוכחה:</u> נגדיר קבוצות

$$L = \{X \mid X \text{ על } \ell\}$$
$$M = \{m \mid m \text{ על } A\}$$

נגדיר העתקה

$$f: L \to M$$
$$f: X \mapsto AX$$

f ① <u>מוגדרת היטב:</u> A לא על ℓ, X על ℓ $\Leftarrow$ $A \neq X$. לכן קיים ישר יחיד AX על A $X \mid A$.

② f <u>חח"ע</u> כי אם $X, Y \in \ell$ כך ש-$AX = AY$ $\Leftarrow$ X,Y "על" AX אז אם $X \neq Y$ אזי A "על" XY אבל ℓ הוא ישר היחיד דרך X,Y ו- A לא על ℓ. סתירה להנחה ש- $X \neq Y$.

③ <u>f על:</u> לכל ישר m על A, $m \neq \ell$ לכן קיים נקודת חיתוך X $A \in m$, $X \in m$ $\Leftarrow$ $m = AX$ לכן $f(X) = AX$ מש"ל

<u>משפט 2:</u> (הדואלי ל **P.5**) : קיימים A, B, C שלוש נקודות שאינם על ישר אחד. נגדיר

$$\ell = BC$$
$$m = CA$$
$$n = AB$$

$\ell \neq m$ כי A, B, C אינם על ישר אחד ובאות ב $m \neq n$ אין עוד נקודות חיתוך של ℓ, m לה' **P.2** אז

$$n \neq \ell$$

ℓ, m, n נפגשים ב נקוד O, היא שווה ל-A כחיתוך של m, n ול-C כחיתוך של ℓ, m. סתירה לכך ש- $A \neq C$

<u>משפט 3:</u> (הדואלי ל **P.4**)על כל נקודה יש לפחות שלושה ישרים.

הוכחה: תהי D נקודה, נתון מ **P.5** שקיימים A, B, C שלא כולם על ישר אחד.
הוכחנו במשפט 4 ששלושת הישרים

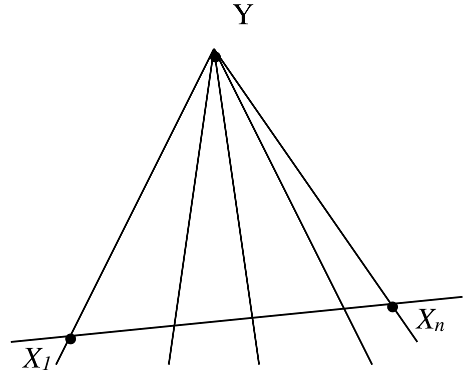
$$\ell = BC$$
$$m = CA$$
$$N = AD$$

אינן על D ואינם עם נקודה אחת. לכן אחד מהם ℓ' לפי למה, יש התאמה חח"ע בין נקודות על ℓ' וישרים על D D לכן יש לפחות שלושה ישרים על D.

לכן גיאומטריה פרויקטיבית עקרון הדואליות,**: אם משפט נכון, גם הדואל נכון**
<u>גיאומטרות סופיות:</u>

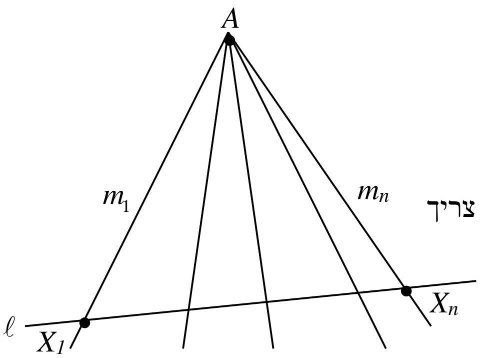
<u>משפט 4:</u> אם יש בדיוק n נקודות על ישר אחד, אז יש בדיוק n נקודות על כל ישר.

<u>הוכחה:</u> תהי ℓ הישר הנתון, ן- m ישר אחר. קיים X נקודת חיתוך, שקיים לפי $P.1$. לפי משפט 3, יש שעוד ישר n על X, לפי **P.4**, יש עוד נקודה Y על n. $Y \notin m$ $Y \notin \ell$ לפי **P.2**. לפי למה 2. יש התאמה חח"ע ועל בין ישרים על Y לבין נקודות על ℓ לפי עקרון הדואליות, יש התאמה חח"ע ועל בין ישרים על Y לנקודות על m לכן יש בדיוק n נקודות על m.



משפט 5: אם יש n נקודות על כל ישר, יש n^2-n+1 ישרים ו n^2-n+1 נקודות סה"כ.

הוכחה: יהיו A,B,C שלוש נקודות שאינם על ישר אחד, ונגדיר $\ell = BC$ אזי $A \notin \ell$.



על ℓ יש n נקודות $X_1 \ldots X_n$.

על A יש n ישרים $m_1 = AX_1, \ldots m_n = AX_n$

כל הנקודות בגיאומטריה נמצאים על $m_1 \ldots m_n$.
כי אחרת אם יש Z יש ישר AZ, דרך Z ודרך A אשר צריך
לפגוש את $\ell = BC$ בנקודה X_i. קיים ישר AX_i.
הוא חתוך את ℓ בנקודה X_i ואז
$AZ = AX_i = m_i$.

על כל m_i יש $n-1$ נקודות חוץ מ A.
כולם שווים כי $A = m_i \cap m_j$.
לכן יש סה"כ $n^2-n+1 = n(n-1)+1$ נקודות בגיאומטריה

$$n=3 \quad n^2-n+1 = 9-3+1 = 7$$

$$n=4 \quad n^2-n+1 = 16-4+1 = 13$$

אין גיאומטריה לכל $3 \le n$ רק ל $n = p+1$ עבור p ראשוני. מתאים ל p^2+p+1

מודל I: המישור האויקלידי המורחב: לקחנו את המישור האויקלידי הרגיל $\mathbb{R}^2$ והוספנו קבוצה

של נקודות אידיאליות המתאימה חח"ע $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ $\quad \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R} \cup \infty$ ונתנו קואורדינאטות
בלתי הומוגניות $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$ נקודות
$m \in \mathbb{R}$ שיפועים
$\infty = \infty$ נקודת ה- ∞

מודל II: לגיאומטריה פרויקטיבית
נבחר שדה F ונגדיר $F^* = F^3 - 0$

נקודות: ישרים ב $\mathbb{F}^3$ דרך $(0,0,0)$ $\quad t(a,b,c)$:
ישרים: משורים

$$dx + ey + fz = 0$$
שנסמן ב
$$[d,e,f]$$
נקודה (a,b,c) על ישר $[d,e,f]$ אם מתקיים
$$da + eb + fc = 0$$
(a,b,c) נקרא קואורדינאטות הומוגניות של הנקודה

$\left[d,e,f\right]$ קואורדינאטות הומוגניות של הישר