בס"ד

גיאומטריה אקסיומתית –הרצאה 5

<u>מודל I:</u> המישור האויקלידי המורחב: לקחנו את המישור האויקלידי הרגיל $\mathbb{R}^2$ והוספנו קבוצה

של נקודות אידיאליות המתאימה חח"ע $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ $\mathbb{R}^2\cup\mathbb{R}\cup\infty$ ונתנו קוארדינאטות

בלתי הומוגניות $(X,Y)\in\mathbb{R}^2$ נקודות

$m\in\mathbb{R}$ שיפועים

$\infty=\infty$ נקודת ה- ∞

<u>מודל II:</u> לגיאומטריה פרויקטיבית

נבחר שדה F ונגדיר $F^3-\{0\}$

נקודות: ישרים ב F^3 דרך $(0,0,0)$: $t(a,b,c)$

ישרים: מישורים

$dx+ey+fz=0$ ב- F^3.

שנסמן ב

$[d,e,f]$

נקודה (a,b,c) על ישר $[d,e,f]$ אם מתקיים

$da+eb+fc=0$

(a,b,c) נקרא קואורדינאטות הומוגניות של הנקודה

$[d,e,f]$ קואורדינאטות הומוגניות של הישר

<u>נבדוק את האקסיומות אקסיומות במודל II.</u>

P.1-P.2 נתונים שני ישרים

ℓ: $dx+ey+fz=0$

ℓ': $d'x+e'y+f'z=0$

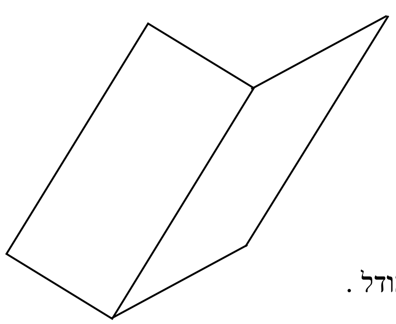
ℓ לא שווה של ℓ'.

מערכת של משוואות הומוגניות

קבוצת הפתרונות הוא מרחב וקטורי

ממימד $1=3-2$

לפי כך יש ישר אחד ויחיד של פתרונות, וזה מגדיר "נקודה" במודל .



P.3

$P=(a,b,c)$

$P'=(a',b',c')$

$O=(x,y,z)$

$P\neq P' \Leftrightarrow$

$$\ell = \left[\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right]$$

$$\ell \cdot Q = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= \left[bc' - b'c, ca' - a'c, ab' - b'a \right]$$

$$\ell \cdot P = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

$$\ell \cdot P' = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0$$

זה מוכיח ש-

$$P \in \ell$$
$$P' \in \ell$$

P.4: על כל ישר יש לפחות 3 נקודות.

ישר נתון על ידי משוואה

$$dx + ey + fz = 0$$

למשוואה הומוגנית אחת ב 3 משתנים
ישי מרחב פתרונות ממימד 2 . זאת

$s,t \in F$ $\quad sv + tw$

אם ניקח $t = 1 \quad s = 0$

$t = 0 \quad s = 1$

$t = 1 \quad s = 1$

נקבל 3 נקודות שונות.

P.5: $(1,0,0)$ $(0,1,0)$ $(0,0,1)$ הם שלושה נקודות שאינם על אותו ישר. נקשר

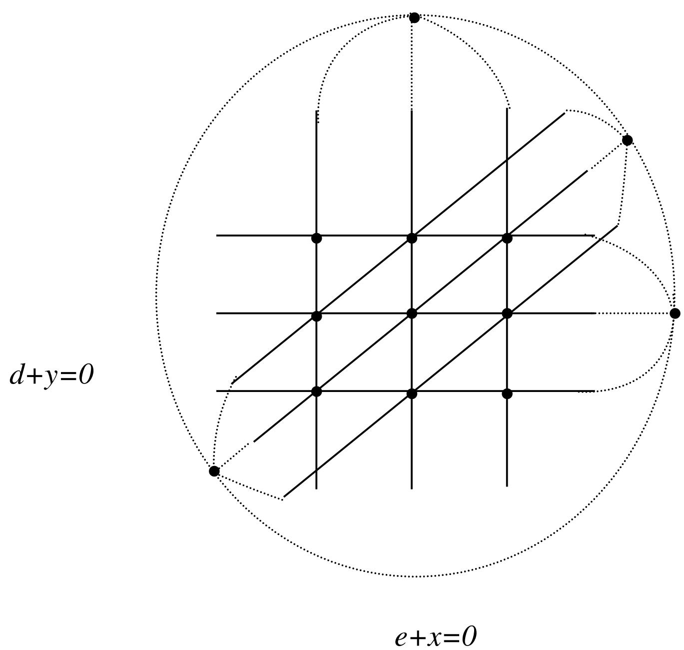
בין מודל I ומודל II
רוצים מישור אידיאלי עבר דרך $(0,0,0)$, ניקח מישור $z = 1$
ונעשה מתאים לנקודה רגילה.

קואורדינאטות הומוגניות		קואורדינאטות בלתי הומוגניות
נקודה רגילה $(a,b,c), c \neq 0$	$\longrightarrow$	$\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right)$
נקודה אידיאלית $(a,b,0), a \neq 0$	$\xrightarrow{\text{שיפוע}}$	$m=\frac{b}{a}$
$(0,1,0)$		∞
טרנספורמציות ליניאריות		פרספקטיבה והעתקות פרויקטיביות

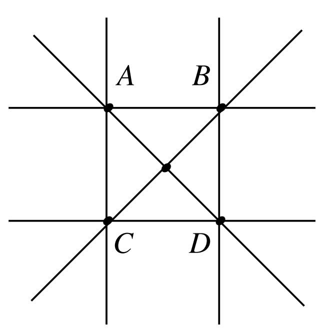
<u>חתכי חרוט:</u> תמונה של מעגלים תחת פרספקטיבה ממישור למישור.

אליפסה	מעגל שאינו חותך את הישר האידיאלי
פרבולה	מעגל שמשיק לישר האידיאלי
היפרבולה	מעגל שחותך את הישר האידיאלי

גיאומטריה של 13 נקודות:



<u>הגדרה:</u> ארבע זוויות שלם



4 נקודות A,B,C,D
6 ישרים
AB,AC,AD,BC,BC,CD
3 נקודות אלכסוניות

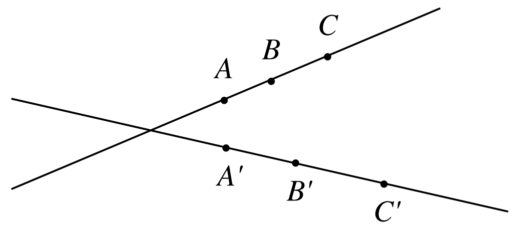
$AB \cap CD = P$
$AC \cap BD = Q$
$AD \cap BC = R$

P.6: נקודות באלכסוניות של 4 זוויות שלם
P, Q, R אינם קולינאריות.

P.7: אם שני משולשים בפרספקטיבה מנקודה הם בפרספקטיבה מישר

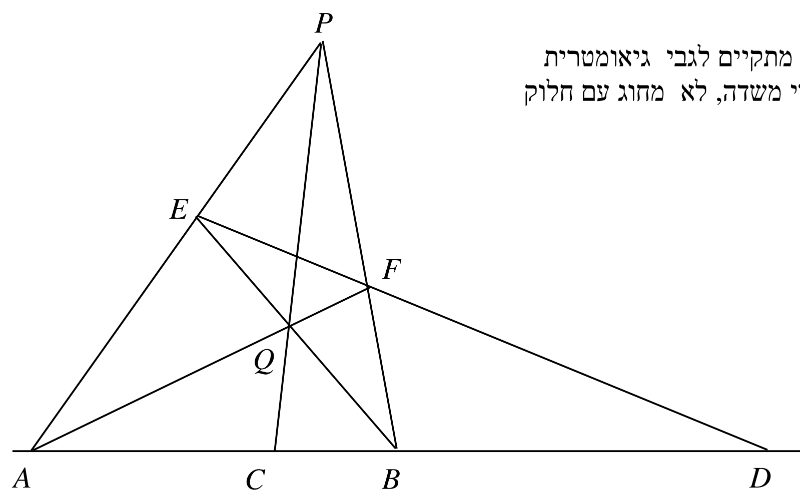
גיאומטריה שמקיים P.7 נקרא <u>דסרגית</u>.

P.8: אם $ABC, A'B'C'$ על שני ישרים ונגדיר
$L = BC' \cap B'C, M = CA' \cap C'A, N = AB' \cap A'B$



L, M, N קולינאריות

P.8 מתקיים לגבי גיאומטרית
שבנוי משדה, לא מחוג עם חלוק



<u>הגדרה:</u> נקודות C, D על ישר ℓ צמודה הרמונית לגבי AB אם"ם
קיים ארבע זוויות שלם $ABEF$
כך D נקודה אלכסונית על AB, ו אם BQ נקודות האלכסוניות P, Q $C = PQ \cap AB$

לפי **P.6**, $C \neq D$
לפי **P.7**, אם נתון D
אז C אינה תלוי בבחירה של P, E, F

$$H\left(AB, CD\right)$$

כל מודל שקיים **P.1 – P.8** אזומורפית ל- $\mathbb{P}^2(F)$

עבור F שדה. לכל L ב $\mathbb{P}^2(F)$, יש התאמה חח"ע ועל בין $\mathbb{P}^2(F)\text{-}L$ ל F^2.

גיאומטריה של שייכות (Incidence Geometry)

עצמים בלתי מוגדרים: "נקודה", "ישר", והיחס "על".

אקסיומות השייכות

I-1 לכל זוג של נקודות שונות $A \neq B$ קיים ישר אחד ויחיד ℓ כך ש A שייך ל ℓ, מסומן A על ℓ, ו B שייך ל ℓ, מסומן B על ℓ. הישר ℓ מסומן $\overleftrightarrow{AB}$.

I-2 לכל ישר ℓ קיימות לפחות שתי נקודות שונות $A \neq B$ כך ש A על ℓ, B על ℓ.

I-3 קיימות לפחות שלש נקודות שונות A, B, C עבורן אין ישר ℓ כך ש A על ℓ, B על ℓ, $\mathbb{R}$ על ℓ.

הגדרה: ישרים שאין להם נקודה משותפת נקראים מקבילים.
משפטים

משפט I.1 לישרים שונים ℓ, m לא מקבילים, יש נקודה משותפת יחידה.

משפט I.2 לכל ישר, קיים נקודות לא על הישר.

משפט I.3 לכל נקודה, יש לפחות ישר אחד שלא עובר דרכו.

משפט I.4 לכל נקודה P קיימים לפחות שני ישרים שונים שעוברים דרך P.

משפט I.5 יש שלושה ישרים שונים שאינם על נקודה אחת.

הגדרה: *משולש* הוא שלושה נקודות שונות A, B, C שאינם על ישר אחד ושלושת הישרים
$\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{CA}$
המשולש מודל לאקסיומות I-1 – I-3.