דף נוסחאות

◄ **סכימת איינשטיין - Einstein summation :**

1. אינדקס עליון- קואורדינטות של ווקטורים $\vec{v} = (v^1, v^2, v^3)$.
2. אינדקס תחתון- איברים שונים בקבוצה $\{e_1, e_2, e_3\}$.
3. מטריצה כהעתקה- $A = (a^i_j)$.
4. מטריצה כתבנית בילינארית- $A = (a_{ij})$. עבור תבנית זו : $a_{[ij]} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji})$, $a_{\{ij\}} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$.
5. מטריצה הופכית- $A^{-1} = (a^{ij})$.
6. הדלתא של קרוניקר- $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j; \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$ וניתן לכתוב מכפלה פנימית כ- $\langle u, v \rangle = \delta_{ij} u^i v^j$.

◄ **סיווג משטחים :**

חתכי חרוט- Cone section	משטחים ריבועיים- Quadratic surfaces
1. אליפסה (Elipse) - $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 2. נקודה (Point) - $x^2 + y^2 = 0$ 3. קבוצה ריקה (Empty set) - $x^2 + y^2 = -1$ 4. היפרבולה (Hyperbula) - $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 5. הישרים $y = \pm x$ מהמשוואה : $x^2 - y^2 = 0$. 6. פרבולה (Parabola) - $x = ay^2 + c$ 7. קו ישר (Straight line) - $x = a$	1. אליפסויד (Elipsoid) - $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ לאליפסויד שני מקרים מיוחדים : • ספירה -(Sphere) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$ 2. היפרבולויד :(Hyperboloid) • היפרבולויד חד שמשי (Hyperboloid of one sheet) - $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ • היפרבולויד דו שמשי (Hyperboloid of two sheet)- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 3. מקרה פרטי של היפרבולויד הוא חרוט (Cone)- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ 4. מקרה פרטי של החרוט הוא חרוט מעגלי (Circular cone)- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$ 5. פראבולויד (Paraboloid) מתחלק לשני סוגים : • פראבולויד היפרבולי (Hyperbolic paraboloid)- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$ • פראבולויד אליפטי (Eliptic paraboloid)- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$ • מקרה פרטי של הפראבולויד האליפטי הוא פראבולויד מעגלי (Circular paraboloid)- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - z = 0$

◄ **עקומות (Curves) :**

- אורך עקומה חלקה α- $L(\alpha) = \int_{[a,b]} \|\alpha'(t)\| dt$.
- עקומה במהירות יחידה (Unit speed paramatrization) : $s(t) = \int_{[0,t]} \|\alpha'(x)\| dx$
- עקמומיות (Curvature) : עבור עקומה עם פרמטריזציה $\alpha(t)$, $k(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{\|\alpha'(t)\|^3}$, ואם היא נתונה על ידי פרמטריזציה במהירות יחידה אז $k(s) = \|\alpha''(s)\|$.

- עקמומיות בצורה סתומה (Implicit form) : נוסחת בייטמן- $|k| = |\frac{D_B(F)}{||\nabla F(x,y)||^3}| = \frac{|D_B(F)|}{(\sqrt{F_x^2+F_y^2})^3}$ עבור,

$$D_B(F) = F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2.$$

◄ **משטחים (Surfaces) :**

- התבנית היסודית הראשונה (First fundemental form) : $g_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle$.
- אורך עקומה על משטח : עבור β עקומה מרחבית, $L(\beta) = \int_{[a,b]} \sqrt{\alpha'(t)^T \cdot (g_{ij}) \cdot \alpha'(t)}dt = \int_{[a,b]} ||\beta'(t)||dt$.
- שטח משטח על משטח : עבור משטח D על X, השטח הנתון $\iint_D \sqrt{\det(g_{ij})}dudv$.

◄ **סמלי גמא (Gamma symbols) :** $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}(g_{mi,j} + g_{mj,i} - g_{ij,m})g^{km}$.

◄ **משוואות גיאודזיות (Geodesic equation) :** $\begin{cases} (\alpha^1)'' + \Gamma_{ij}^1(\alpha^i)'(\alpha^j)' = 0 \\ (\alpha^2)'' + \Gamma_{ij}^2(\alpha^i)'(\alpha^j)' = 0. \end{cases}$,

◄ **התבנית היסודית השניה (Second fundemental form) :**

- התבנית היסודית השניה (Second fundemental form) : היא המטריצה $(L_{ij}) = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$ כאשר $L_{ij} = \langle X_{ij}, \vec{n} \rangle$.
- נורמל היחידה למשטח (unit normal) : $\vec{n} = \begin{cases} \frac{X_1 \times X_2}{||X_1 \times X_2||} & \text{וקטורי הנגזרות של הפרמטריזציה } X_1, X_2 \text{ כאשר ;} \\ \frac{\nabla F}{||\nabla F||} & \text{כאשר נתונה הצורה הסתומה, } F(x,y,z) = 0. \end{cases}$
- העתקת וינגרטן (Weingorten map) : המטריצה המייצגת של ההעתקה $(L_j^i) = \begin{pmatrix} L_1^1 & L_2^1 \\ L_1^2 & L_2^2 \end{pmatrix}$ ניתנת לחישוב בשני דרכים :

1. על ידי המשוואות : $\begin{cases} W(X_1) = L_1^1X_1 + L_1^2X_2 = \vec{n}_1 \\ W(X_2) = L_2^1X_1 + L_2^2X_2 = \vec{n}_2 \end{cases}$ כאשר $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ הם הנגזרות החלקיות של נורמל היחידה.
2. $L_i^j = -L_{ik}g^{kj}$ ובכתיב מטריצות : $\begin{pmatrix} L_1^1 & L_2^1 \\ L_1^2 & L_2^2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$ **כאשר המטריצה האחרונה היא התבנית היסודית השניה**.

◄ **עקמוממיות גאוס (Gaussian carvature) :**

- מוגדרת בכל נקודה כ- $K = \det(L_j^i) = \frac{\det(L_{ij})}{\det(g_{ij})}$. **או בנוסח אחר** $K = k_1 \cdot k_2$ כאשר k_1, k_2 הם הערכים העצמיים של (L_j^i) שהם העקמומיות הראשיות.
- העקמומיות הממוצעת : $H = \frac{k_1+k_2}{2} = \frac{1}{2}tr(L_j^i)$. אם $H = 0$ בכל נקודה נאמר כי המשטח הוא **מינימלי**.

◄ **קואורדינטות איזותרמיות (Isothermal coordinates) :**

- פרמטריזציה $X(u,v)$ נקראת איזותרמית והקואו' u, v איזותרמיות, אם קיימת $f(u,v)$ עבורה $(g_{ij}) = f^2(u,v)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. כלומר התבנית היסודית הראשונה מיוצגת על ידי מטריצה סקלרית.
- עבור $X(u,v)$ פרמטריזציה איזותרמית, $\Delta(X) = -2f^2H\vec{n}$.

◄ **המשפט הראוי לציון (Theorema Egregium) :**

- $K = \frac{1}{g_{11}}\left(\Gamma_{11,2}^2 - \Gamma_{12,1}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 + \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2\right) \rightarrow$ עקמומיות גאוס.