

שאלון בחינה בקורס: גיאומטריה אוקלידית ולא-אוקלידית (537-88)

סמסטר א', מועד א': 11.02.18

מרצה: פרופ' מיכאל כץ

זמן בחינה: שלוש שעות

יש לענות על כל השאלות 1-5 ולתת נימוק והסבר. שאלון סגור.

1. (15 נקודות) הוכיחו את משפט Desargues: אם במשולשים ABC ו $A'B'C'$ הישרים AA', BB', CC' הם קונקורנטיים, אזי נקודות L, M, N כאשר $L = AB \cap A'B', M = AC \cap A'C', N = BC \cap B'C'$ הן קולינאריות.

2. (15 נקודות) יהיו A, B, C, A', B' נקודות נתונות במישור. תנו בנייה מפורטת המתחילה עם ישר שרירותי x דרך A ומיצרת נקודה $X \in x$ הנמצאת על חתך חרוט העובר דרך A, B, C, A', B' .

3. (15 נקודות) מצא טרנספורמציה פרואקטיבית המעבירה מעגל $x^2 + y^2 = 1$ לחתך חרוט $XY + 1 = 0$.

4. (28 נקודות) נתבונן בשדה $F = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \dots, 9, 10\}$ בעל 11 אברים. יהי A המישור האפייני מעל F , יהי FP^1 הישר הפרויקטיבי מעל F , יהי FP^2 המישור הפרויקטיבי מעל F .

א. מצא מספר נקודות ב- FP^1 ומספר נקודות ומספר ישרים ב- A .

ב. מצא מספר נקודות ומספר ישרים ב- FP^2 .

ג. מצא מספר נקודות חיתוך ב FP^2 בין זוג ישרים פרויקטיביים מוגדרים ע"י משוואות $x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0$ ו $4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0$ (עם מקדמים בשדה F) בקואורדינטות הומוגניות.

ד. מצא מספר נקודות חיתוך ב FP^2 בין זוג ישרים פרויקטיביים מוגדרים ע"י משוואות $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$ וגם $3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0$ בקואורדינטות הומוגניות.

5. (27 נקודות) יהי $R(A, B, C, D_k)$ היחס הכפול של נקודות ב $\mathbb{C}P^1$ כאשר

$A = \infty, B = 0, C = 1$. נניח $D_k = \frac{1}{2}(1 + ik\sqrt{3})$, כאשר $k \in \mathbb{Z}$, $i = \sqrt{-1}$.

א. מצא כל הערכים האפשריים השונים של היחס הכפול תחת כל התמורות של הרביעיה (A, B, C, D_k) כאשר $k = 0$.

ב. מצא כל הערכים האפשריים השונים של היחס הכפול תחת כל התמורות של הרביעיה כאשר $k = 1$.

ג. יהי $f(k)$ מספר הכולל של ערכים שונים זה מזה של היחס הכפול תחת כל התמורות של הרביעיה (A, B, C, D_k) . חשב $f(k)$ כפונקציה מפורשת של האינדקס $k \in \mathbb{Z}$.

(שאלת בונוס: 8 נקודות) נתון מעגל יחידה γ עם מרכז O ונקודה A פנימית למעגל. יהי δ מעגל מאונך למעגל γ . נניח שהפיכה ב δ תשלח את נקודה O לנקודה A . מצא נקודת המרכז M והרדיוס $R > 0$ של δ .

בהצלחה!