

תרגיל 5 (להגשה ב- 7/6/10)

1. יהי ABC משולש ויהיו AD', BE', CF' חוצי הזוויות החיצוניות כש- $D' \in BC, E' \in CA, F' \in AB$. הוכיחו ש- D', E', F' קולינאריות.

2. ציירו את הציורים המתאימים לטענות הבאות, נסחו את הדואלי להן וציירו גם אותו:
 (א) אם A, B, C נקודות שונות לא קולינאריות ו- E, D נקודות שונות כך ש- D, B, C קולינאריות ו- C, A, E קולינאריות אז יש נקודה F כך ש- A, B, F קולינאריות ו- D, E, F קולינאריות.
 (ב) [משפט פפוס הזעיר]: אם R_1, R_2, R_3 הן נקודות שונות על ישר r ו- S_1, S_2, S_3 נקודות שונות על ישר s ואם הישרים R_1S_1, R_2S_2, R_3S_3 נפגשים בנקודה P אז הנקודות $R_1S_2 \cap R_3S_2, R_1S_3 \cap R_3S_1, R_2S_3 \cap R_3S_2$ נמצאות על ישר p שהוא קונקורנטי עם הישרים r, s .

3. נסתכל על קבוצת ההעתקות הפרויקטיביות מהישר הפרויקטיבי לעצמו (מעל R) אשר שומרות על הקבוצה $\{0, 1, \infty\}$ ("ז"א - לכל $x \in \{0, 1, \infty\}, f(x) \in \{0, 1, \infty\}$).
 (א) לאיזו חבורה איזומורפית קבוצת ההעתקות הנ"ל? הוכיחו איזומורפיזם.
 (ב) כמה העתקות פרויקטיביות כאלו ישנן? מצאו את כולן ("ז"א - כתבו אותן בצורת $f(x) = (ax+b)/(cx+d)$).
 (ג) כתבו את המטריצות המתאימות להעתקות אלו ב- $PSL(2, R)$.

4. יהי F שדה סופי עם q איברים.
 (א) מצאו את הסדר של $GL_n(F)$.
 (ב) מצאו את הסדר של $PGL_n(F) := GL_n(F)/Z(GL_n(F))$.
 (ג) הוכיחו שקיים הומומורפיזם $PGL_2(F) \rightarrow \text{Sym}_{q+1}$ (כאשר Sym_{q+1} היא חבורת התמורות על $q+1$ איברים). הוכיחו שהומומורפיזם זה אינו על עבור $q > 5$.
 * (ד) הוכיחו שהומומורפיזם זה הוא חח"ע.

5. יהי F שדה עם 3 איברים. הוכיחו ש- $PGL_2(F) \cong \text{Sym}_4$ וש- $PSL_2(F) \cong A_4$.