

## דף תרגילים 10

201 – 88 תשע"ח סמסטר ב'

**תרגיל 1** נתונה תבנית ריבועית  $Q(x, y) = -3x^2 + 4xy - 6y^2$ .

א. עקומה מישורית מוגדרת ע"י המשוואה  $Q(x, y) = -1$ . לאפיין את העקומה.

ב. לאפיין את המשטח המתקבל כגרף של התבנית הריבועית  $z = Q(x, y)$ .

ג. למצוא את עקמומיות גאוס של משטח זה בראשית הצירים.

### פתרון 1

א.

$$S = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

ערכים עצמיים  $-2, -7$  (אין צורך למצוא מטריצה מלכסנת, כי אין איברים לינאריים). לאחר שינוי הקואורדינטות:

$$-2x^2 - 7y^2 + 1 = 0$$

כלומר זו אליפסה.

ב.

$$-3x^2 + 4xy - 6y^2 - z = 0$$

$$S = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לפי החישוב שכבר עשינו בסעיף א' הע"ע הם  $-2, -7, 0$ . כמו כן ציר  $z$  יהיה אינוואריאנטי תחת הלכסון, והאיבר הלינארי היחיד הוא  $z$ . לכן אין צורך למצוא מטריצה מלכסנת, והצורה האלכסונית אחרי החלפת קואורדינטות היא:

$$z = -2x^2 - 7y^2$$

כלומר זהו פרבולואיד אליפטי.

ג. הנקודה  $(0, 0)$  נקודה קריטית של  $f(x, y) = -3x^2 + 4xy - 6y$  כי  $\nabla f = \vec{0}$ , לכן

$$K(0, 0) = \det(W_p) = \det(H_f) = \begin{vmatrix} -6 & 4 \\ 4 & -12 \end{vmatrix} = 56$$

**תרגיל 2** נסתכל על המשטח שהוא הגרף של הפונקציה  $f(x, y) = y^4$ .

א. מיצאו פרמטריזציה, וקטור נורמל.

ב. מהי עקמומיות גאוס בכל נקודה של המשטח?

ג. בנקודות הקריטיות של  $f(x, y)$ , ודאו את תשובתכם באמצעות חישוב מטריצת ההסיאן.

## פתרון 2

א. נמשיך לעבוד בקואורדינטות  $x, y$  כלומר נבחר פרמטריזציה  $\underline{x}(x, y) = (x, y, y^4)$  ואז

$$x_1 = (1, 0, 0)$$

$$x_2 = (0, 1, 4y^3)$$

נחשב נורמל. נסמן נירמול של וקטור  $\hat{v} = \frac{v}{|v|}$ . אז

$$\begin{aligned} n = \widehat{x_1 \times x_2} &= \widehat{\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4y^3 \end{vmatrix}} \\ &= \widehat{\begin{pmatrix} 0 \\ -4y^3 \\ 1 \end{pmatrix}} = (1 + 16y^6)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -4y^3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ב.

$$\begin{cases} x_{11} = (0, 0, 0) \\ x_{12} = (0, 0, 0) \\ x_{22} = (0, 0, 12y^2) \end{cases}$$

כלומר

$$L_{ij} = \begin{pmatrix} \langle x_{11}, n \rangle & \langle x_{12}, n \rangle \\ \langle x_{12}, n \rangle & \langle x_{22}, n \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{12y^2}{\sqrt{1+16y^6}} \end{pmatrix}$$

לסיים  $K = \frac{\det(L_{ij})}{\det(g_{ij})} = \frac{0}{\det(g_{ij})} = 0$  כלומר עקמומיות גאוס 0 בכל נקודה.

ג. הנקודות הקריטיות הן הנקודות של הישר  $y = 0$ . שם מתקיים

$$H_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בנקודות אלו  $K = \det(H_f) = 0$ .

### תרגיל 3

א. ממצאו פרמטריזציה של חרוט כמשטח סיבוב של העקומה  $(\phi, a\phi)$  באשר  $r(\phi), z(\phi) = (\phi, a\phi)$   $a > 0$ . ממצאו את מקדמי התבנית היסודית הראשונה והשנייה, ואת עקמומיות גאוס.

ב. ממצאו את מקדמי  $\Gamma_{ij}^k$  ואת המשוואות הגאודזיות.

### פתרון 3

א. פרמטריזציה

$$x(\theta, \phi) = (\phi \cos \theta, \phi \sin \theta, a\phi)$$

$$\begin{cases} x_1 = (-\phi \sin \theta, \phi \cos \theta, 0) \\ x_2 = (\cos \theta, \sin \theta, a) \end{cases}$$

תבנית יסודית ראשונה

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \phi^2 & 0 \\ 0 & 1 + a^2 \end{pmatrix}$$

נחשב תבנית יסודית שנייה:

$$\begin{cases} x_{11} = (-\phi \cos \theta, -\phi \sin \theta, 0) \\ x_{12} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \\ x_{22} = (0, 0, 0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} n = \widehat{x_1 \times x_2} &= \begin{vmatrix} \widehat{e_1} & \widehat{e_2} & \widehat{e_3} \\ -\phi \sin \theta & \phi \cos \theta & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta & a \end{vmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a\phi \cos \theta \\ a\phi \sin \theta \\ -\phi \end{pmatrix} = \phi^{-1}(1 + a^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} a\phi \cos \theta \\ a\phi \sin \theta \\ -\phi \end{pmatrix} \\ &= (1 + a^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} a \cos \theta \\ a \sin \theta \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

כלומר

$$L_{ij} = \begin{pmatrix} \langle x_{11}, n \rangle & \langle x_{12}, n \rangle \\ \langle x_{12}, n \rangle & \langle x_{22}, n \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-a\phi}{\sqrt{1+a^2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

עקמוניות גאוס

$$K = \frac{\det(L_{ij})}{\det(g_{ij})} = \frac{0}{\det(g_{ij})} = 0$$

3. כפי שראינו בסעיף א'

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \phi^2 & 0 \\ 0 & 1 + a^2 \end{pmatrix}$$

לכן

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} \phi^{-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+a^2} \end{pmatrix}$$

וכן

$$(g_{ij;1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (g_{ij;2}) = \begin{pmatrix} 2\phi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

רק  $g_{11;2} = 2\phi$  שונה מ-0.

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}(g_{11;1} - g_{11;1} + g_{11;1})g^{11} = 0$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2}(g_{12;1} - \overbrace{g_{11;2}}^{2\phi} + g_{12;1})g^{22} = \frac{-\phi}{1+a^2}$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2}(\overbrace{g_{11;2}}^{2\phi} - g_{12;1} + g_{21;1})g^{11} = \frac{1}{\phi}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}(g_{12;2} - g_{12;2} + g_{22;1})g^{22} = 0$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2}(g_{21;2} - g_{22;1} + g_{21;2})g^{11} = 0$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}(g_{22;2} - g_{22;2} + g_{22;2})g^{22} = 0$$

המשוואות הגאודזיות הן

$$\begin{cases} \alpha^{i'} \alpha^{j'} \Gamma_{ij}^1 + \alpha^{1''} = 0 \\ \alpha^{i'} \alpha^{j'} \Gamma_{ij}^2 + \alpha^{2''} = 0 \end{cases}$$

אצלנו

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{-\phi}{1+a^2} \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{\phi}$$

לכן במשוואה הראשונה רק  $\Gamma_{12}^1 \neq 0$  כלומר היא

$$2\alpha^{1'}\alpha^{2'}\frac{1}{\phi} + \alpha^{1''} = 0$$

במשוואה השנייה רק  $\Gamma_{11}^2 \neq 0$  כלומר היא

$$(\alpha^{1'})^2 \frac{-\phi}{1+a^2} + \alpha^{2''} = 0$$

#### תרגיל 4

א. ממצאו פרמטריזציה של טורוס כמשטח סיבוב של  $(r(\phi), z(\phi)) = (5 + 2 \cos \phi, 2 \sin \phi)$ .

ב. ממצאו את מקדמי התבנית היסודית הראשונה והשנייה, ואת עקמוניות גאוס.

ג. מהן הנקודות בהן עקמוניות גאוס חיובית? שלילית? אפס?

ד. ממצאו את מקדמי  $\Gamma_{ij}^k$  ואת המשוואות הגאודטיות.

#### פתרון 4

א. פרמטריזציה

$$x(\theta, \phi) = ((5 + 2 \cos \phi) \cos \theta, (5 + 2 \cos \phi) \sin \theta, 2 \sin \phi)$$

ב. תבנית יסודית ראשונה

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & \left|\frac{d\alpha}{d\phi}\right|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (5 + 2 \cos \phi)^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

למציאת תבנית יסודית שנייה נחשב תחילה נגזרות שניות

$$\begin{cases} x_1 = -(5 + 2 \cos \phi) \sin \theta, (5 + 2 \cos \phi) \cos \theta, 0) \\ x_2 = (-2 \sin \phi \cos \theta, -2 \sin \phi \sin \theta, 2 \cos \phi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} = -(5 + 2 \cos \phi) \cos \theta, -(5 + 2 \cos \phi) \sin \theta, 0) \\ x_{12} = (2 \sin \phi \sin \theta, -2 \sin \phi \cos \theta, 0) \\ x_{22} = (-2 \cos \phi \cos \theta, -2 \cos \phi \sin \theta, -2 \sin \phi) \end{cases}$$

כעת נחשב נורמל

$$x_1 \times x_2 = (2(5 + 2 \cos \phi) \cos \phi \cos \theta, 2(5 + 2 \cos \phi) \cos \phi \sin \theta, 2(5 + 2 \cos \phi) \sin \phi)$$

וקטור זה פרופורציוני ל-

$$(\cos \phi \cos \theta, \cos \phi \sin \theta, \sin \phi)$$

זהו וקטור בעל אורך 1 כלומר זהו הנורמל.

לכן תבנית יסודית שניה

$$L_{ij} = \begin{pmatrix} \langle x_{11}, n \rangle & \langle x_{12}, n \rangle \\ \langle x_{12}, n \rangle & \langle x_{22}, n \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \phi (5 + 2 \cos \phi) & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

עקמומיות גאוס

$$K = \frac{\det(L_{ij})}{\det(g_{ij})} = \frac{2 \cos \phi (5 + 2 \cos \phi)}{4(5 + 2 \cos \phi)^2} = \frac{\cos \phi}{2(5 + 2 \cos \phi)}$$

ג. סימן  $K = \frac{\cos \phi}{2(5 + 2 \cos \phi)}$  הוא כסימן  $\cos \phi$ , כלומר

$$(א) \quad K = 0 \text{ כאשר } \phi = \frac{\pi}{2} \text{ ו- } \phi = \frac{3\pi}{2}$$

$$(ב) \quad K > 0 \text{ כאשר } \frac{\pi}{2} < \phi < \frac{3\pi}{2}$$

$$(ג) \quad K < 0 \text{ כאשר } \frac{3\pi}{2} < \phi < \frac{5\pi}{2}$$

ד. כפי שראינו בסעיף ב'

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} (5 + 2 \cos \phi)^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

לכן

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} (5 + 2 \cos \phi)^{-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

וכן

$$(g_{ij;1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (g_{ij;2}) = \begin{pmatrix} -2 \sin \phi (5 + 2 \cos \phi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

רק  $g_{11;2} = -2 \sin \phi (5 + 2 \cos \phi)$  שונה מ-0.

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}(g_{11;1} - g_{11;1} + g_{11;1})g^{11} = 0$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2}(g_{12;1} - \overbrace{g_{11;2}}^{-2 \sin \phi (5 + 2 \cos \phi)} + g_{12;1})g^{22} = \frac{1}{4} \sin \phi (5 + 2 \cos \phi)$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2}(\overbrace{g_{11;2}}^{-2 \sin \phi (5 + 2 \cos \phi)} - g_{12;1} + g_{21;1})g^{11} = \frac{-\sin \phi}{5 + 2 \cos \phi}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}(g_{12;2} - g_{12;2} + g_{22;1})g^{22} = 0$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2}(g_{21;2} - g_{22;1} + g_{21;2})g^{11} = 0$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}(g_{22;2} - g_{22;2} + g_{22;2})g^{22} = 0$$

המשוואות הגאודזיות הן

$$\begin{cases} \alpha^{i'} \alpha^{j'} \Gamma_{ij}^1 + \alpha^{1''} = 0 \\ \alpha^{i'} \alpha^{j'} \Gamma_{ij}^2 + \alpha^{2''} = 0 \end{cases}$$

אצלנו

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{4} \sin \phi (5 + 2 \cos \phi) \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{-\sin \phi}{5 + 2 \cos \phi}$$

לכן במשוואה הראשונה רק  $\Gamma_{12}^1 \neq 0$  כלומר היא

$$2\alpha^{1'} \alpha^{2'} \frac{-\sin \phi}{5 + 2 \cos \phi} + \alpha^{1''} = 0$$

במשוואה השנייה רק  $\Gamma_{11}^2 \neq 0$  כלומר היא

$$\left(\alpha^{1'}\right)^2 \frac{1}{4} \sin \phi (5 + 2 \cos \phi) + \alpha^{2''} = 0$$

**תרגיל 5** לבטא ע"י המקדמים  $g_{ij}, L_{ij}, L^i_j, \Gamma_{ij}^k$  ולפשט ככל הניתן:

א.  $\langle x_j, x_{pq} \rangle g^{jp}$

ב.  $\langle x_{pqr}, n \rangle$

ג.  $\langle x_{pq}, n_s \rangle \delta_m^q$

ד.  $g_{pq} \delta_s^q g^{st} \delta_t^p$

$$\langle x_{ij}, n_k \rangle \delta_m^k g^{m\ell} \quad \text{ה.}$$

$$\langle n_i, x_j \rangle g^{i\ell} \quad \text{ו.}$$

$$\langle n_i, n_j \rangle \quad \text{ז.}$$

$$\langle n, n_{ab} \rangle \delta_c^a \quad \text{ח.}$$

$$|x_{ij}|^2 \quad \text{ט.}$$

$$\langle x_{ij}, x_k \rangle \delta_m^k g^{m\ell} \quad \text{י.}$$

## פתרון 5

א. סכימה  $p, j$ , חופשי  $q$ .

$$\begin{aligned} \langle x_j, x_{pq} \rangle g^{jp} &= \langle x_j, \Gamma_{pq}^k x_k + L_{pq} n \rangle g^{jp} \\ &= (\Gamma_{pq}^k \langle x_j, x_k \rangle + L_{pq} \langle x_j, n \rangle) g^{jp} \\ &= \Gamma_{pq}^k g_{jk} g^{jp} \\ &= \Gamma_{pq}^k g_{kj} g^{jp} \\ &= \Gamma_{pq}^k \delta_k^p \\ &= \Gamma_{pq}^p \end{aligned}$$

ב.

$$\begin{aligned} \langle x_{pqr}, n \rangle &\stackrel{Leibniz}{=} \langle x_{pq}, n \rangle_r - \langle x_{pq}, n_r \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial u^r} L_{pq} - \langle x_{pq}, n_r \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial u^r} L_{pq} - \langle \Gamma_{pq}^k x_k + L_{pq} n, L_r^\ell x_\ell \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial u^r} L_{pq} - \Gamma_{pq}^k L_r^\ell g_{k\ell} \\ &= \frac{\partial}{\partial u^r} L_{pq} + \Gamma_{pq}^k L_{kr} \end{aligned}$$



ג. סכימה  $q$ , חפשיים  $p, s, m$ .

$$\begin{aligned}
 \langle x_{pq}, n_s \rangle \delta_m^q &= \langle x_{pm}, n_s \rangle \\
 &= \langle \Gamma_{pq}^k x_k + L_{pq} n, L_s^\ell x_\ell \rangle \\
 &= \Gamma_{pq}^k L_s^\ell g_{k\ell} \\
 &= \Gamma_{pq}^k (g_{k\ell} L_s^\ell) \\
 &= -\Gamma_{pq}^k L_{ks}
 \end{aligned}$$

ד. סכימה  $q, s, t, p$ .

$$\begin{aligned}
 g_{pq} \delta_s^q g^{st} \delta_t^p &= g_{ts} g^{st} \\
 &= \delta_t^t \\
 &= Tr(I_2) \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

ה. סכימה  $m, k$ , חפשיים  $\ell, i, j$ .

$$\begin{aligned}
 \langle x_{ij}, n_k \rangle \delta_m^k g^{m\ell} &= \langle x_{ij}, n_k \rangle g^{k\ell} \\
 &= \langle \Gamma_{ij}^a x_a + L_{ij} n, n_k \rangle g^{k\ell} \\
 &= \left( \Gamma_{ij}^a \overbrace{\langle x_a, n_k \rangle}^{-L_{ak}} + L_{ij} \overbrace{\langle n, n_k \rangle}^0 \right) g^{k\ell} \\
 &= -\Gamma_{ij}^a L_{ak} g^{k\ell} \\
 &= -\Gamma_{ij}^a (g^{\ell k} L_{ka}) \\
 &= \Gamma_{ij}^a L_a^\ell
 \end{aligned}$$

ו. סכימה  $i$ , חפשיים  $j, \ell$ .

$$\begin{aligned}
 \langle n_i, x_j \rangle g^{i\ell} &= L_{ij} g^{i\ell} \\
 &= g^{\ell i} L_{ij} \\
 &= -L_j^\ell
 \end{aligned}$$

ז.

$$\begin{aligned}
\langle n_i, n_j \rangle &= \langle L^k_i x_k, L^\ell_j x_\ell \rangle \\
&= L^k_i L^\ell_j \langle x_k, x_\ell \rangle \\
&= L^k_i L^\ell_j g_{k\ell} \\
&= L^k_i (g_{k\ell} L^\ell_j) \\
&= -L^k_i L_{kj}
\end{aligned}$$

ח. סכימה  $a$ , חפשיים  $b, c$ .

$$\begin{aligned}
\langle n, n_{ab} \rangle \delta_c^a &= \langle n, n_{cb} \rangle \\
&= \langle n, n_c \rangle_b - \langle n_b, n_c \rangle \\
&= \overbrace{\langle n, L^k_c x_k \rangle_b}^0 - \langle L^m_b x_m, L^\ell_c x_\ell \rangle \\
&= -L^m_b L^\ell_c \langle x_m, x_\ell \rangle \\
&= -L^m_b L^\ell_c g_{m\ell} \\
&= L^m_b L_{mc}
\end{aligned}$$

ט.

$$\begin{aligned}
|x_{ij}|^2 &= \langle x_{ij}, x_{ij} \rangle \\
&= \langle \Gamma^k_{ij} x_k + L_{ij} n, \Gamma^m_{ij} x_m + L_{ij} n \rangle \\
&= \Gamma^k_{ij} \Gamma^m_{ij} \langle x_k, x_m \rangle + (L_{ij})^2 \overbrace{\langle n, n \rangle}^1 \\
&= \Gamma^k_{ij} \Gamma^m_{ij} g_{km} + (L_{ij})^2
\end{aligned}$$

. סכימה  $k, m$ , חפשיים  $i, j, \ell$ .

$$\begin{aligned}
 \langle x_{ij}, x_k \rangle \delta_m^k g^{m\ell} &= \langle x_{ij}, x_k \rangle g^{k\ell} \\
 &= \langle \Gamma_{ij}^a x_a + L_{ij} n, x_k \rangle g^{k\ell} \\
 &= \Gamma_{ij}^a \langle x_a, x_k \rangle g^{k\ell} \\
 &= \Gamma_{ij}^a g_{ak} g^{k\ell} \\
 &= \Gamma_{ij}^a \delta_a^\ell \\
 &= \Gamma_{ij}^\ell
 \end{aligned}$$