

מערך תרגול 12

201 – 88 תשע"ח סמסטר ב'

תרגיל 1 (מסוף תרגול שעבר) בקואורדינטות $(u^1, u^2) = (x, y)$ נתון משטח בעל המטריקה

$$(g_{ij}(x, y)) = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

עבור $y > 0$. מציאו את עקמומיות גאוס.

פתרון 1 ראשית נמצא את סמלי גמא. גורס קונפורמי $\lambda(x, y) = y$, נגזרותיו $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$. לכן

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\lambda_1}{2\lambda} = 0$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{-\lambda_1}{2\lambda} = 0$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{\lambda_2}{2\lambda} = \frac{1}{2y}$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{-\lambda_2}{2\lambda} = \frac{-1}{2y}$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{\lambda_2}{2\lambda} = \frac{1}{2y}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{\lambda_1}{2\lambda} = 0$$

כעת,

$$\begin{aligned} K &= \frac{2}{g_{11}} \left(\Gamma_{1[1,2]}^2 + \Gamma_{1[1]}^j \Gamma_{2]j}^2 \right) \\ &= \frac{2}{g_{11}} \left(\Gamma_{1[1,2]}^2 + \Gamma_{1[1]}^1 \Gamma_{2]1}^2 + \Gamma_{1[1]}^2 \Gamma_{2]2}^2 \right) \\ &= \frac{1}{g_{11}} \left(\Gamma_{11,2}^2 - \Gamma_{12,1}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 \right) \\ &= \frac{1}{y} \left(\frac{1}{2y^2} - 0 + 0 - \left(\frac{1}{2y} \right) \left(\frac{-1}{2y} \right) + \left(\frac{-1}{2y} \right) \left(\frac{1}{2y} \right) - 0 \right) \\ &= \frac{1}{2y^3} \end{aligned}$$

תרגיל 2 לרשום מי הם האינדקסים החופשיים ואינדקסי הסכימה, ולפשט את הביטוי ככל הניתן:

$$\langle x_{ij}, n_k \rangle \delta_m^k g^{m\ell}$$

פתרון 2 סכימה k, m , חפשיים ℓ, i, j .

$$\begin{aligned} \langle x_{ij}, n_k \rangle \delta_m^k g^{m\ell} &= \langle x_{ij}, n_k \rangle g^{k\ell} \\ &= \langle \Gamma_{ij}^a x_a + L_{ij} n, n_k \rangle g^{k\ell} \\ &= \left(\Gamma_{ij}^a \overbrace{\langle x_a, n_k \rangle}^{-L_{ak}} + L_{ij} \overbrace{\langle n, n_k \rangle}^0 \right) g^{k\ell} \\ &= -\Gamma_{ij}^a L_{ak} g^{k\ell} \\ &= -\Gamma_{ij}^a (g^{\ell k} L_{ka}) \\ &= \Gamma_{ij}^a L_a^\ell \end{aligned}$$

תרגיל 3 לרשום מי הם האינדקסים החופשיים ואינדקסי הסכימה, ולפשט את הביטוי ככל הניתן:

$$\langle n, n_{ab} \rangle \delta_c^a$$

פתרון 3 סכימה a , חפשיים b, c .

$$\begin{aligned} \langle n, n_{ab} \rangle \delta_c^a &= \langle n, n_{cb} \rangle \\ &= \langle n, n_c \rangle_b - \langle n_b, n_c \rangle \\ &= \overbrace{\langle n, L_c^k x_k \rangle_b}^0 - \langle L_b^m x_m, L_c^\ell x_\ell \rangle \\ &= -L_b^m L_c^\ell \langle x_m, x_\ell \rangle \\ &= -L_b^m L_c^\ell g_{m\ell} \\ &= L_b^m L_{mc} \end{aligned}$$

1 עקמומיות מסומנת

תזכורת 1

א. עקמומיות מסומנת \tilde{k}_α של עקומה מישורית $\alpha(s)$ במהירות יחידה היא

$$\tilde{k}_\alpha = \frac{d\theta}{ds}$$

באשר $\theta(s)$ הזווית שיוצר המשיק $v(s) = \alpha'(s)$ עם הכיוון החיובי של ציר x , נגד כיוון השעון.

מתקיים $|\tilde{k}_\alpha| = k_\alpha$, כלומר עקמומיות מסומנת היא עידון של העקמומיות $k_\alpha = |\alpha''(s)|$ של עקומה מישורית.

ב. ביחס לפרמטר t כלשהו, עקמומיות מסומנת של $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ ניתנת לחישוב ע"י

$$\tilde{k}_\alpha = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{|\dot{\alpha}|^3} = \frac{\det[\dot{\alpha} \ddot{\alpha}]}{|\dot{\alpha}|^3}$$

בפרט מקבלים את הנוסחה לעקמומיות של עקומה מישורית פרמטר t כלשהו:

$$k_\alpha = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{|\dot{\alpha}|^3} = \frac{|\det[\dot{\alpha} \ddot{\alpha}]|}{|\dot{\alpha}|^3}$$

תרגיל 4 מיצאו את העקמומיות של גרף הפונקציה $y = f(x)$.

פתרון 4

$$\alpha(t) = (t, f(t))$$

$$\alpha'(t) = (1, f'(t))$$

$$\alpha''(t) = (0, f''(t))$$

כלומר

$$\begin{aligned}\tilde{k}_\alpha(x) &= \frac{\det[\dot{\alpha} \ddot{\alpha}]}{|\dot{\alpha}|^3} = \frac{1}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix} \right|^3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ f'(x) & f''(x) \end{vmatrix} \\ &= \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

כלומר

$$k_\alpha(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

2 עקמומיות כוללת

תזכורת 2

א. עקומת ז'ורדן במישור היא עקומה מישורית סגורה שלא חותכת את עצמה, כלומר התמונה של העתקה $\alpha : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ שהיא רציפה וחח"ע.

ב. עקומת ז'ורדן חלקה $C \subset \mathbb{R}^2$ נקראת קמורה ממש אם הפנים של כל קטע המחבר שתי נקודות על C מוכל בפנים של C (כלומר בתחום החסום שמובטח ממשפט ז'ורדן).

באופן שקול: בכל נקודה p העקומה כולה, מלבד הנקודה p עצמה, נמצאת מצידו האחד של המשיק T_p .

ג. תהי C עקומה עם פרמטריזציה מהירות יחידה $\alpha(s) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. העקמומיות הכוללת של C היא

$$Tot(C) = \int_a^b k_\alpha(s) ds$$

ד. העקמומיות הכוללת של כל עקומת ז'ורדן חלקה קמורה ממש היא 2π .

תרגיל 5 נתונה עקומה מישורית מוגדרת ע"י המשוואה

$$3x^2 + 4xy - 6y^2 = -1$$

מהי העקמומיות הכוללת של עקומה זו?

פתרון 5 העקומה היא חתך חרוט. נבין את צורתה:

$$S = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

כלומר פולינום אופייני

$$(-3-x)(-6-x) - 4 = 0$$

כלומר $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -7$. לכן אחרי לכסון העקומה מוגדרת ע"י $-2x^2 - 7y^2 + 1 = 0$ כלומר זו אליפסה. בפרט, זו עקומת ז'ורדן קמורה, לכן העקמומיות הכוללת שלה היא 2π .

תזכורת 3

א. עקמומיות מסומנת כוללת

$$\tilde{Tot}(C) = \int_a^b \tilde{k}_\alpha(s) ds$$

ב. עקמומיות מסומנת כוללת של עקומת ז'ורדן חלקה כלשהי (לאו דווקא קמורה) היא $\pm 2\pi$.

תרגיל 6 (*Leminscate of Gerono*) נתונה העקומה

$$\alpha(t) = (\sin t, \frac{1}{2} \sin(2t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

א. ציירו סקיצה של העקומה.

ב. על סמך צורת העקומה, מהי העקמומיות המסומנת הכוללת?

פתרון 6

א. ציור.

ב. יש סיבוב אחד עם כיוון השעון וסיבוב אחד נגד כיוון השעון, כלומר עקמומיות מסומנת כוללת 0.