

מערך תרגול 5

201 – 88 תשע"ח סמסטר ב'

1 פרמטריזציית אורך הקשת

תזכורת 1 אורך העקומה $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ הוא $\int_a^b |\alpha'(t)| dt$.

דוגמא 1 היקף מעגל היחידה $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ כאשר $t \in [0, 2\pi]$ הוא

$$\int_0^{2\pi} |(-\sin t, \cos t)| dt = \int_0^{2\pi} (-\sin t)^2 + (\cos t)^2 dt = 2\pi$$

אורך העקומה $\beta(t) = (\cos t, \sin t)$ כאשר $t \in [0, 4\pi]$ הוא באותו האופן 4π . פרמטריזציה זו היא סיבוב פעמיים סביב המעגל לכן קיבלנו אורך כפול.

תזכורת 2 נאמר שהפרמטריזציה $\alpha(s) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ היא פרמטריזציית מהירות יחידה או פרמטריזציית אורך קשת אם $|\alpha'(s)| = 1$ לכל s .

1 תרגיל

א. מציאו פרמטריזציה לקטע הקו הישר המחבר בין $(1, 2, 3)$ ו- $(4, 6, 8)$.

ב. מה אורך הקטע?

ג. מציאו פרמטריזצית אורך קשת.

פתרון 1

א. $\alpha(t) = (1, 2, 3) + t((4, 6, 8) - (1, 2, 3)) = (1, 2, 3) + t(3, 4, 5)$ עבור $0 \leq t \leq 1$.

ב. ברור כי אורך הקטע הוא $|(3, 4, 5)| = \sqrt{50}$.

שימו לב בנוסף כי

$$\int_0^1 |\alpha'(t)| dt = \int_0^1 |(3, 4, 5)| dt = |(3, 4, 5)| = \sqrt{50}$$

ג.

$$s(t) = \int_0^t \left| \frac{d\alpha}{d\tau} \right| d\tau = \int_0^t |(3, 4, 5)| d\tau = \int_0^t \sqrt{50} d\tau = t\sqrt{50}$$

לכן $t(s) = \frac{s}{\sqrt{50}}$ כלומר $\beta(s) = \alpha(t(s)) = \alpha(\frac{s}{\sqrt{50}}) = (1, 2, 3) + \frac{s}{\sqrt{50}}(3, 4, 5)$

תרגיל 2 מציאו פרמטריזציה אורך קשת עבור ההליקס $\alpha(t) = (a \cos wt, a \sin wt, bt)$

פתרון 2 $\alpha'(t) = (-aw \sin wt, aw \cos wt, b)$ לכן $|\alpha'(t)| = \sqrt{a^2 w^2 + b^2}$. לכן אורך הקשת הוא

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 w^2 + b^2} d\tau = t\sqrt{a^2 w^2 + b^2}$$

כלומר אם נסמן $c = \frac{1}{\sqrt{a^2 w^2 + b^2}}$ נקבל

$$t(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2 w^2 + b^2}} = cs$$

כלומר

$$\beta(s) = \alpha(t(s)) = \alpha(cs) = (a \cos wcs, a \sin wcs, bcs)$$

בדיקה:

$$|\beta'(s)| = |c(-aw \sin wcs, aw \cos wcs, b)| = 1$$

2 עקמומיות

תזכורת 3

א. העקמומיות של עקומה $\alpha(s)$ במהירות יחידה היא $|\alpha''(s)|$.

ב. בעתיד נראה נוסחא לעקמומיות עבור עקומה בפרמטריזציה כלשהי.

ג. העקמומיות שווה ל- $\frac{1}{r}$ כאשר r הרדיוס של המעגל הנושק (האוסקולטורי) בנקודה.

ד. עבור עקומה מישורית הנתונה ע"י המשוואה $F(x, y) = 0$ עם $\nabla F \neq 0$ העקמומיות היא

$$\frac{|D_B(F)|}{|\nabla F|^3}$$

כאשר

$$D_B(F) = F_{xx}F_yF_y - 2F_{xy}F_yF_x + F_{yy}F_xF_x$$

ה. אם c נקודה קריטית של $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ אז העקמומיות של הגרף של f בנקודה $(c, f(c))$ שווה ל- $|f''(c)|$.

תרגיל 3 מציאו עקמומיות עבור ההליקס $\alpha(t) = (a \cos wt, a \sin wt, bt)$

פתרון 3 בתרגיל לעיל מצאנו פרמטריזציה אורך קשת:

$$\beta(s) = (a \cos wcs, a \sin wcs, bcs)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{a^2 w^2 + b^2}}$$

באשר $|\beta''(s)|$ ראינו כי כעת צריך למצוא את

$$\beta'(s) = c(-aw \sin wcs, aw \cos wcs, b)$$

לכן

$$\beta''(s) = -w^2 c^2 a (\cos wcs, \sin wcs, 0)$$

כלומר

$$|\beta''(s)| = w^2 c^2 |a| = \frac{|a| w^2}{a^2 w^2 + b^2}$$

עקמומיות קבועה. בפרט עבור $a = b = w = 1$ נקבל $k_\beta(s) = \frac{1}{2}$ לצייר.

תרגיל 4 מציאו עקמומיות עבור האליפסה $F(x, y) = ax^2 + by^2 - 1 = 0$ כאשר $a, b > 0$.

פתרון 4

$$\nabla F = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ax \\ 2by \end{pmatrix}$$

לכן

$$|\nabla F|^3 = \left(2\sqrt{(ax)^2 + (by)^2} \right)^3 = 8((ax)^2 + (by)^2)^{\frac{3}{2}}$$

כמו כן

$$|D_B(F)| = 2a(2by)^2 + 2b(2ax)^2 = 8ab(ax^2 + by^2) = 8ab$$

המעבר האחרון בגלל שעל העקומה שלנו $ax^2 + by^2 = 1$. לכן העקמומיות היא

$$\frac{|D_B(F)|}{|\nabla F|^3} = \frac{ab}{((ax)^2 + (by)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

למשל עבור מעגל ברדיוס 1 כלומר $a = b = 1$ נקבל כמובן

$$k_C = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1$$

תרגיל 5 מציאו את העקמומיות של העקומה הנתונה ע"י $\gamma(t) = (1 + 2 \cos t, -3 + 2 \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

פתרון 5 $\gamma'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t)$ לכן $|\gamma'(t)| = \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} = 2$.

נחשב אורך קשת

$$s(t) = \int_0^t |\gamma'(\tau)| d\tau = \int_0^t 2 d\tau = 2t$$

לכן $t(s) = \frac{s}{2}$ כלומר פרמטריזציה מהירות יחידה היא $\alpha(s) = \gamma(t(s)) = \gamma(\frac{s}{2}) = (1 + 2 \cos \frac{s}{2}, -3 + 2 \sin \frac{s}{2})$.

כעת נוכל לחשב עקמומיות:

$$k = |\alpha''(s)| = \left| \frac{-1}{2} \left(\cos \frac{s}{2}, \sin \frac{s}{2} \right) \right| = \frac{1}{2}$$

תרגיל 6

א. מציאו נקודה או נקודות (אם קיימות) של עקמומיות מקסימלית על העקומה $x + y^2 = 1$.

ב. מה בדבר נקודות בהן העקמומיות מינימאלית?

פתרון 6

א. $F(x, y) = x + y^2 - 1$ לכן

$$|\nabla F|^3 = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2y \end{pmatrix} \right|^3 = (1 + 4y^2)^{\frac{3}{2}}$$

נחשב את אופרטור בייטמן

$$F_x = 1, F_y = 2y, F_{xx} = 0, F_{yy} = 2, F_{xy} = F_{yx} = 0$$

כלומר $D_B(F) = F_{yy}F_xF_x = 2$ וסה"כ מקבלים שהעקמומיות היא

$$\frac{2}{(1 + 4y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

כדי למצוא את העקמומיות המקסימלית ניתן לגזור פונקציה זו ולהשוות ל-0. דרך יותר מהירה היא לשים לב שהמכנה מינימאלי כאשר $y = 0$. כלומר נקודה עם עקמומיות מקסימלית היא $(1, 0)$.

ג.

$$k = \frac{2}{(1 + 4y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

העקמומיות שואפת ל-0 כאשר y הולך וגדל (בשני הכיוונים). יחד עם זאת העקמומיות 0 לא מתקבלת באף נקודה. (לצייר ציור)

תרגיל 7 מציאו נקודה או נקודות (אם קיימות) של עקמומיות מקסימלית על העקומה $y^2 - 3 = 2xy$.

פתרון 7 $F(x, y) = y^2 - 2xy - 3$ לכן

$$|\nabla F|^3 = (4y^2 + 4(y - x)^2)^{\frac{3}{2}} = (8y^2 - 8xy + 4x^2)^3$$

נשים לב כי נוכל לפשט ביטוי זה כי על העקומה שלנו $y^2 - 2xy = 3$ כלומר $4y^2 - 8xy = 12$ לכן

$$|\nabla F|^3 = (4x^2 + 4y^2 + 12)^{\frac{3}{2}} = 8(x^2 + y^2 + 3)^{\frac{3}{2}}$$

כעת נחשב את אופרטור בייטמו: $F_x = -2y, F_{xx} = 0, F_{xy} = -2, F_y = 2y - 2x, F_{yy} = 2$ כלומר $2, F_{yx} = -2$

$$D_B(F) = 8y^2 - 8y(2y - 2x) = 16xy - 8y^2$$

שוב נוכל לפשט ביטוי זה באמצעות המשוואה המגדירה את העקומה שלנו:

$$D_B(F) = -24$$

סה"כ קיבלנו עקמומיות $k = \frac{|-24|}{8(x^2 + y^2 + 3)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{(x^2 + y^2 + 3)^{\frac{3}{2}}}$ כעת לחישוב המקסימום על העקומה, נשים לב כי מספיק למצוא מתי המכנה קטן ביותר וזה קורה כאשר $x^2 + y^2$ קטן ביותר על העקומה. נבודד את אחד המשתנים מהמשוואה המגדירה את העקומה ונציב אותו ב- $x^2 + y^2$. העקומה היא

$$y^2 - 3 = 2xy \text{ לכן } x = \frac{y^2 - 3}{2y}$$

$$\left(\frac{y^2 - 3}{2y}\right)^2 + y^2 = \frac{(y^2 - 3)^2}{4y^2} + y^2$$

נסמן $z = y^2$, אז רוצים למצוא מינימום ל-

$$g(z) = \frac{(z - 3)^2}{4z} + z = \frac{z^2 - 6z + 9}{4z} + z = \frac{z}{4} - \frac{3}{2} + \frac{9}{4z} + z$$

נשווה את הנגזרת לאפס $g'(z) = \frac{5}{4} - \frac{9}{4z^2} = 0$ ונקבל $z = \frac{3}{\sqrt{5}}$. קל לראות שזו אכן נקודת מינימום למשל ע"י נגזרת שניה.

בחזרה למשתנה y : $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{5}}$ ואת x ניתן למצוא מהעבה ב- $x = \frac{y^2 - 3}{2y}$.