

מערך תרגול 8

201 – 88 תשע"ח סמסטר ב'

תזכורת 1

א. תהי $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ עקומה מישורית ו- $x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ משטח. אז $\beta = x \circ \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ עקומה מרחבית שנמצאת על המשטח. היא מקיימת

$$\beta'' = \left(\alpha^{i'} \alpha^{j'} \Gamma_{ij}^k + \alpha^{k''} \right) x_k + \left(L_{ij} \alpha^{i'} \alpha^{j'} \right) n$$

ב. נאמר כי $\beta(s) = x \circ \alpha$ עקומה גאודזית על המשטח x אם

$$\alpha^{i'} \alpha^{j'} \Gamma_{ij}^k + \alpha^{k''} = 0$$

לכל k . זו מערכת של שתי משוואות, הנקראות המשוואות הגאודזיות. באופן שקול, הוקטור $\beta'' = L_{ij} \alpha^{i'} \alpha^{j'} n$ מאונך למשטח ו- $\beta'' = 0$.

תרגיל 1 המשוואה הגאודזית

$$\alpha^{i'} \alpha^{j'} \Gamma_{ij}^k + \alpha^{k''} = 0$$

רשומה באמצעות הסכם הסכימה של איינשטיין. רישמו אותה מפורשות.

פתרון 1 ראשית כאמור מדובר בשתי משוואות, עבור $k = 1, 2$:

$$\begin{cases} \alpha^{i'} \alpha^{j'} \Gamma_{ij}^1 + \alpha^{1''} = 0 \\ \alpha^{i'} \alpha^{j'} \Gamma_{ij}^2 + \alpha^{2''} = 0 \end{cases}$$

כל אחת מהמשוואות רשומה באמצעות הסכם הסכימה של איינשטיין:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \alpha^{i'} \alpha^{j'} \Gamma_{ij}^1 + \alpha^{1''} = 0 \\ \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \alpha^{i'} \alpha^{j'} \Gamma_{ij}^2 + \alpha^{2''} = 0 \end{cases}$$

כלומר מפורשות:

$$\begin{cases} (\alpha^1)'{}^2 \Gamma_{11}^1 + 2\alpha^1' \alpha^{2'} \Gamma_{12}^1 + (\alpha^{2'})^2 \Gamma_{22}^1 + \alpha^{1''} = 0 \\ (\alpha^1)'{}^2 \Gamma_{11}^2 + 2\alpha^1' \alpha^{2'} \Gamma_{12}^2 + (\alpha^{2'})^2 \Gamma_{22}^2 + \alpha^{2''} = 0 \end{cases}$$

אפשר לכתוב גם ככה:

$$\begin{cases} \left(\frac{d\alpha^1}{ds}\right)^2 \Gamma_{11}^1 + 2\frac{d\alpha^1}{ds} \frac{d\alpha^2}{ds} \Gamma_{12}^1 + \left(\frac{d\alpha^2}{ds}\right)^2 \Gamma_{22}^1 + \frac{d^2\alpha^1}{ds^2} = 0 \\ \left(\frac{d\alpha^1}{ds}\right)^2 \Gamma_{11}^2 + 2\frac{d\alpha^1}{ds} \frac{d\alpha^2}{ds} \Gamma_{12}^2 + \left(\frac{d\alpha^2}{ds}\right)^2 \Gamma_{22}^2 + \frac{d^2\alpha^2}{ds^2} = 0 \end{cases}$$

תרגיל 2 מציאו את העקומות הגיאודזיות על הגליל

$$x(\theta, \phi) = (\cos \theta, \sin \theta, \phi)$$

פתרון 2 ראיתם בהרצאה ובתרגיל בית כי $\Gamma_{ij}^k = 0$ לכל i, j, k . לכן המשוואות הגאודזיות הן

$$\begin{cases} \alpha^{1''} = 0 \\ \alpha^{2''} = 0 \end{cases}$$

נפתור את $\alpha^{1''} = 0$:

$$\alpha^{1''} = 0$$

$$\alpha^{1'} = \int 0 ds = C_1$$

$$\alpha^1 = \int C_1 ds = C_1 s + C_2$$

באשר $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. באותו האופן מ- $\alpha^{2''} = 0$ מקבלים $\alpha^2 = C_3 s + C_4$.

לכן מצאנו שהעקומות הגיאודזיות הן $\beta(s) = x \circ \alpha(s)$ עבור

$$\alpha(s) = (C_1 s + C_2, C_3 s + C_4) = (C_1, C_3)s + (C_2, C_4)$$

כלומר הן תמונות של קווים ישרים:

$$\beta(s) = x(\alpha(s)) = x(C_1 s + C_2, C_3 s + C_4)$$

$$= (\cos(C_1 s + C_2), \sin(C_1 s + C_2), C_3 s + C_4)$$

תזכורת 2

א. נאמר שהמטריקה g_{ij} שקולה קונפורמית למטריקה השטוחה הסטנדרטית אם יש פונקציה $\lambda(u^1, u^2) > 0$ כך ש- $g_{ij} = \lambda \delta_{ij}$ לכל i, j . ל- λ קוראים הגורם הקונפורמי.

ב. נסמן $\lambda_i = \frac{\partial \lambda}{\partial u^i}$. אז

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{\lambda_1}{2\lambda}, & \Gamma_{22}^1 &= \frac{-\lambda_1}{2\lambda}, & \Gamma_{12}^1 &= \frac{\lambda_2}{2\lambda} \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{-\lambda_2}{2\lambda}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{\lambda_2}{2\lambda}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{\lambda_1}{2\lambda}\end{aligned}$$

בפרט, $\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 = 0$ וכן $\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 = 0$.

תרגיל 3 בקואורדינטות $(u^1, u^2) = (x, y)$ מציאו את המשוואות הגאודזיות של משטח בעל המטריקה

$$(g_{ij}(x, y)) = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

עבור $y > 0$.

פתרון 3 שבוע שעבר חישבנו ישירות כי עבור מטריקה זו מקבלים

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^2 &= \frac{-1}{2y} \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2y} \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2y}\end{aligned}$$

ו- $\Gamma_{ij}^k = 0$ אחרת. נוודא זאת, הפעם באמצעות הנוסחאות עבור מטריקה השקולה קונפורמית למטריקה שטוחה סטנדרטית. מתקיים $g_{ij} = y \delta_{ij}$ כלומר $\lambda(x, y) = y > 0$ הגורם הקונפורמי. מתקיים

$$\lambda_1 = \frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0, \quad \lambda_2 = \frac{\partial \lambda}{\partial y} = 1$$

לכן אכן

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{\lambda_1}{2\lambda} = 0 \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{-\lambda_1}{2\lambda} = 0 \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{\lambda_2}{2\lambda} = \frac{1}{2y} \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{-\lambda_2}{2\lambda} = \frac{-1}{2y} \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{\lambda_2}{2\lambda} = \frac{1}{2y} \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{\lambda_1}{2\lambda} = 0\end{aligned}$$

כעת, המשוואות הגאודזיות הן

$$\alpha^{i'} \alpha^{j'} \Gamma_{ij}^1 + \alpha^{1''} = 0$$

$$\alpha^{i'} \alpha^{j'} \Gamma_{ij}^2 + \alpha^{2''} = 0$$

כלומר

$$\frac{1}{y} \alpha^{1'} \alpha^{2'} + \alpha^{1''} = 0$$

$$\frac{1}{2y} \left((\alpha^{2'})^2 - (\alpha^{1'})^2 \right) + \alpha^{2''} = 0$$

לסיום נשתמש בסימון אחיד לקואורדינטות. הרי $(x, y) = (\alpha^1(s), \alpha^2(s))$, לכן נבחר לעבוד למשל עם x, y :

$$\frac{1}{y} x' y' + x'' = 0$$

$$\frac{1}{2y} \left((y')^2 - (x')^2 \right) + y'' = 0$$

באשר

$$x' = \frac{dx}{ds}, \quad y' = \frac{dy}{ds}$$

תרגיל 4 נתון המשטח הבא ב- \mathbb{R}^3 :

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = y^3\}$$

הוכיחו שהקו

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\}$$

הוא עקומה גיאודזית של M .

פתרון 4 נמצא פרמטריזציה למשטח:

$$x(u^1, u^2) = (u^1, u^2, (u^2)^3)$$

נסתכל על העקומה המישורית

$$\alpha(s) = (s, 0) = (\alpha^1(s), \alpha^2(s))$$

מתקיים $\beta(s) = x \circ \alpha(s) = (s, 0, 0)$ כלומר תמונת β היא אכן הקו L . נשים לב כי זהו קו ישר, לכן בפרט גאודזי: אכן, מתקיים $\beta'(s) = (1, 0, 0)$ לכן $\beta''(s) = (0, 0, 0)$ ובפרט

$$\alpha^{i'} \alpha^{j'} \Gamma_{ij}^k + \alpha^{k''} = 0$$

לכל k , כלומר β עקומה גאודזית, מש"ל. ¹

תרגיל 5 בקואורדינטות $(u^1, u^2) = (x, y)$, נניח $h(x, y) = Cx$ כאשר $C > 0$ ונתבונן במטריקה מוגדרת על ידי נוסחה

$$h(x, y)^{-2} \delta_{ij}$$

נשים לב כי המטריקה לא מוגדרת עבור $x = 0$ לכן אנחנו מסתכלים בעצם על חצי מישור ימני.

א. חשבו את המקדמים $\Gamma_{22}^1, \Gamma_{12}^1, \Gamma_{21}^1, \Gamma_{11}^1$ של המטריקה.

ב. בטאו משוואה דיפרנציאלית של קו גאודזי של המטריקה.

פתרון 5

א. המטריקה שקולה קונפורמית למטריקה שטוחה סטנדרטית, עם גורם קונפורמי

$$\lambda(x, y) = C^{-2} x^{-2} > 0$$

¹לשם התרגול נראה זאת גם ישירות, כלומר כך היינו עושים אם לא היינו שמים לב ש- $\vec{\beta}''(s) = \vec{0}$: מתקיים $\alpha^{1'} = 1, \alpha^{2'} = 0, \alpha^{1''} = 0, \alpha^{2''} = 0$ כלומר המשוואות הגיאודזיות הן

$$\begin{cases} 1^2 \Gamma_{11}^1 + 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot \Gamma_{12}^1 + 0^2 \Gamma_{22}^1 + 0 = 0 \\ 1^2 \Gamma_{11}^2 + 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot \Gamma_{12}^2 + 0^2 \Gamma_{22}^2 + 0 = 0 \end{cases}$$

כלומר

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = 0 \\ \Gamma_{11}^2 = 0 \end{cases}$$

כלומר הקו הישר L הוא עקומה גיאודזית אם ורק אם $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0$, לכן נשאר רק לחשב מקדמים אלה. נחשב את המטריקה: $x_1 = (1, 0, 0), x_2 = (0, 1, 3(u^2)^2)$ כלומר

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + 9(u^2)^4 \end{pmatrix}, \quad (g_{ij;1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (g_{ij;2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 36(u^2)^3 \end{pmatrix}$$

כלומר $g_{22;2} = 36(u^2)^3$ וכל שאר $g_{ij;k}$ הם 0. לכן

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \left(\overbrace{g_{11;1}}^0 - \overbrace{g_{11;1}}^0 + \overbrace{g_{11;1}}^0 \right) g^{11} = 0 \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2} \left(\overbrace{g_{12;1}}^0 - \overbrace{g_{11;2}}^0 + \overbrace{g_{12;1}}^0 \right) g^{22} = 0 \end{aligned}$$

כדרוש.

מתקיים

$$\lambda_1 = \frac{\partial \lambda}{\partial x} = -2C^{-2}x^{-3}$$

$$\lambda_2 = \frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0$$

לכן

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\lambda_1}{2\lambda} = \frac{-2C^{-2}x^{-3}}{2C^{-2}x^{-2}} = -x^{-1}$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{-\lambda_1}{2\lambda} = -\Gamma_{11}^1 = x^{-1}$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{\lambda_2}{2\lambda} = 0$$

באשר השתמשנו ביחס $\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 = 0$.

ב. אם $\beta(s) = x \circ \alpha(s)$ עקומה גאודזית אז

$$\left(\frac{d\alpha^1}{ds}\right)^2 \Gamma_{11}^1 + 2\frac{d\alpha^1}{ds}\frac{d\alpha^2}{ds}\Gamma_{12}^1 + \left(\frac{d\alpha^2}{ds}\right)^2 \Gamma_{22}^1 + \frac{d^2\alpha^1}{ds^2} = 0$$

כלומר

$$-x^{-1} \left(\frac{d\alpha^1}{ds}\right)^2 + x^{-1} \left(\frac{d\alpha^2}{ds}\right)^2 + \frac{d^2\alpha^1}{ds^2} = 0$$

כלומר כיוון ש- $\alpha(s) = (\alpha^1(s), \alpha^2(s)) = (x, y)$ אז נקבל שהמשוואה הראשונה היא

$$\frac{-1}{x} \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \frac{1}{x} \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \frac{d^2x}{ds^2} = 0$$

באותו אופן המשוואה השנייה:

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{\lambda_2}{2\lambda} = 0$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{-\lambda_2}{2\lambda} = 0$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{\lambda_1}{2\lambda} = -x^{-1}$$

לכן

$$\left(\frac{d\alpha^1}{ds}\right)^2 \Gamma_{11}^2 + 2\frac{d\alpha^1}{ds}\frac{d\alpha^2}{ds}\Gamma_{12}^2 + \left(\frac{d\alpha^2}{ds}\right)^2 \Gamma_{22}^2 + \frac{d^2\alpha^2}{ds^2} = 0$$

כלומר

$$-x^{-1} \frac{d\alpha^1}{ds} \frac{d\alpha^2}{ds} + \frac{d^2\alpha^2}{ds^2} = 0$$

כלומר

$$\frac{-1}{x} \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} + \frac{d^2y}{ds^2} = 0$$