

חומר עזר אסור פרט לדף נוסחאות מצורף ומחשבון פשוט (כלומר ללא חיבור אינטרנט, מקלדת או טלפון). בכל מקרה די לתת תשובות מספריות בדיוק של עד שלוש ספרות אחרי הנקודה. יש לנמק (בקצרה) את התשובות.

יש לבחור 4 שאלות מתוך 5. (לא ניתן לענות על סעיפים בכל 5 השאלות) כל שאלה שווה 27-נקודות, אך הציון המקסימלי הוא 100.

זמן הבחינה: שלוש שעות

1. א. האם קיימת שרשרת מרקוב עם מספר אינסופי של מצבים חולפים, מספר אינסופי של מצבים נשנים-0 ומספר אינסופי של מצבים נשנים-חיובית? (תנו דוגמה שיש או הוכחה שאין) (7)
- ב. האם קיימת שרשרת מרקוב עם אינסוף מצבים חולפים, 4 נשנים ו 4 נשנים חיובית? (7)
- ג. יהיו i, j מצבים בשרשרת מרקוב הומוגנית, ונניח שיש הסתברות חיובית לעבור מ i ל j תוך מספר סופי של צעדים. האם בהכרח יש סיכוי חיובי, כשמתחילים ב i , לעבור ב j לפחות 3 פעמים? (6)
- ד. יהיו i, j מצבים בשרשרת מרקוב הומוגנית, ונניח שיש הסתברות חיובית, כשמתחילים מ i , לעבור ב j לפחות 3 פעמים. האם בהכרח יש סיכוי חיובי, כשמתחילים מ i , לעבור ב j לפחות 5 פעמים? (7)

2. תהי $\{X_n\}$ שרשרת מרקוב הומוגנית על המצבים $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ עם מטריצת מעבר נתונה ע"

$$P = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} a & 3 & 0 & 2-a & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 6 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

נגדיר תהליך חדש

$$Y_n = \begin{cases} 1 & X_n = 1 \text{ or } X_n = 2 \\ 2 & X_n = 3 \text{ or } X_n = 4 \\ 3 & X_n = 5 \text{ or } X_n = 6 \end{cases}$$

- א. האם התהליך Y_n שרשרת מרקוב עבור $a=1$? נמק. (7)
- ב. האם התהליך Y_n שרשרת מרקוב עבור $a=2$? נמק. (7)
- ג. עבור הערכים (או ערך) של a מהסעיפים הקודמים בו יוצא כי Y_n שרשרת מרקוב, כתבו את מטריצת המעבר של Y_n ומצאו את ההתפלגות הסטציונרית של Y_n . (13)

3. א. יהיו X, Y, Z שלושה משתנים מקריים שכל אחד מתפלג אחיד על $\{1,2,3,4,5,6\}$ (קוביות). האם קיים צימוד של שלושת הקוביות כך ש $P(Y>Z)>1/2$, $P(X>Y)>1/2$ ו $P(Z>X)>1/2$? (7)

ב. יהיה $\{X_n\}$ הילוך מקרי מוטה על השלמים, שמתחיל מ-0, ובכל צעד הולך ימינה בסיכוי $3/4$ ושמאלה בסיכוי $1/4$, ועוצר כשהוא מגיע ל ± 10 . הראו שהסיכוי שההילוך יגיע ל 10 (ולא יעצר במקום ב-10) הוא לא פחות מ-0.5. (20)

4. נתונה שרשרת מרקוב $\{X_t\}$ בזמן רציף על המצבים $S=\{1,2,3,4\}$ עם יוצר אינפיטיסימלי

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

- מהן מחלקות הקשירות של השרשרת. מיינו את המצבים לנשנים וחולפים. (7)
- מהי מטריצת המעבר של השרשרת הטמונה? (5)
- מצאו שרשרת מרקוב בזמן בדיד כך ש $\{X_t\}$ תהיה שרשרת אחידה יחסית אליה. כלומר שרשרת $\{Y(n)\}$ ותהליך פואסון הומוגני $\{N_t\}$ כך ש $X_t=Y(N_t)$ (7)
- בהנתן $X_0=4$, מה תוחלת הזמן עד שהשרשרת תגיע לקבוצת המצבים הנשנים? (8)

5. מטילים שוב ושוב מטבע מוטה הנוחת על עץ בסיכוי 0.75 ועל פלי בסיכוי 0.25. תהי $\{X_n\}$ שרשרת מרקוב הסופרת את האורך של הרצף הנוכחי של מספר הנפילות על עץ, חסום ע"י 10. (כלומר בכל פעם שיוצא פלי השרשרת עוברת למצב 0, אם הרצף הנוכחי של עצים ארוך מ-10, השרשרת נשארת במצב 10 עד שיוצא פלי)
- כתבו את הסתברויות המעבר של השרשרת. (5)
 - מצאו התפלגות סטציונרית לשרשרת. רמז – כדאי להתחיל מלמצוא את המידה הסטציונרית של המצב 0. (8)

ג. הראו ש- $t_{mix}(\varepsilon) < \frac{\ln \varepsilon}{\ln \frac{3}{4}} + 1$ עבור כל $0 < \varepsilon < 1$. (14)

בהצלחה!