

חומר עזר אסור פרט לדף נוסחאות מצורף ומחשבון פשוט (כלומר ללא חיבור אינטרנט, מקלדת או טלפון). בכל מקרה די לתת תשובות מספריות בדיוק של עד שלוש ספרות אחרי הנקודה. יש לנמק (בקצרה) את התשובות.

יש לבחור 4 שאלות מתוך 5. (לא ניתן לענות על סעיפים בכל 5 השאלות) כל שאלה שווה 27-נקודות, אך הציון המקסימלי הוא 100. זמן הבחינה: שלוש שעות

1. א. אם $\{X_n\}, \{Y_n\}$ שרשראות מרקוב בלתי תלויות עם ערכים שלמים, האם בהכרח גם $\{X_n + Y_n\}$ שרשרת מרקוב? (9)
- ב. האם בכל שרשרת מרקוב אי פריקה בעלת מחזור d , יש לכל שני מצבים בשרשרת סיכוי חיובי לעבור מאחד לשני תוך כפולה שלמה של d ? (9)
- ג. האם בשרשרת מרקוב בעלת שלושה מצבים יש לכל היותר 3 התפלגויות סטציונריות שונות? (9)

2. נתונה שרשרת מרקוב על המצבים $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ עם מטריצת המעבר

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

- א. מיינו את המצבים של השרשרת (6)
- ב. חשבו את $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(i, i)$ עבור $i = 1, \dots, 6$ (7)
- ג. מצאו שתי התפלגויות סטציונריות שונות. (7)
- ד. חשבו את תוחלת הזמן עד ששרשרת שמתחילה במצב 1 נבלעת בקבוצת המצבים הנשנים. (7)

3. תהי X_n שרשרת מרקוב בזמן רציף על המצבים $S = \{1, 2, 3\}$ עם יוצר אינפיטיסימלי

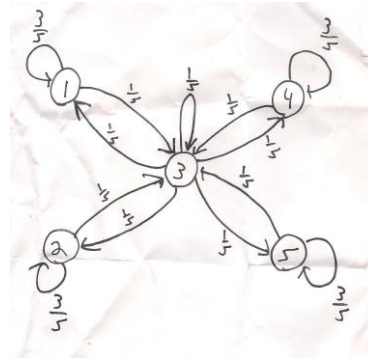
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

- א. מהן מחלקות הקשירות של השרשרת? איזה מצבים חולפים ואיזה נשנים? (7)
- ב. מהי מטריצת המעבר של השרשרת הטמונה? (6)
- ג. מצאו נוסחה ל $P_t(3, 3)$. (7)
- ד. מצאו נוסחה ל $P_t(1, 1)$. (7)

4. יהיו $\{X_n\}$ סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות שכל אחד מהם מתפלג אחיד על הקטע $[0, 1]$.

- א. יהיה B_n המאורע $B_n = \{X_{n+1} < \frac{X_n}{n}\}$. מה ההסתברות שקורים אינסוף מהמאורעות B_n ? (9)
- ב. יהיה C_n המאורע $C_n = \{X_n < \frac{1}{e^n}\}$. מה הסיכוי שקורים אינסוף מהמאורעות C_n ? (9)
- ג. יהיו D_n המאורעות $D_n = \{(\sum_{k=1}^n X_k) - \frac{n}{2} > \frac{n}{4}\}$. מה הסיכוי שיקרו אינסוף מהמאורעות D_n ? (רמז- אחת הדרכים היא בעזרת חוקי המספרים הגדולים או חוק הגבול המרכזי). (9)

5. נתונה שרשרת מרקוב על המצבים $S=\{1,2,3,4,5\}$ עם הסתברויות מעבר הנתונות



- בציור הבא: (כל המעברים של $1/5$ מלבד הלולאות בפינות שהן $3/5$)
- א. מצאו את ההתפלגות הסטציונרית של השרשרת (כדאי אך לא חובה להעזר בסימטריה) (6)
- ב. האם השרשרת רברסבילית? (4)
- ג. מצאו זמן סטציונרי חזק של השרשרת. (9)
- ד. השתמשו בזמן שמצאתם להראות שזמן הערבוב של המערכת מקיים $t_{mix} < 10$. (8)

בהצלחה!