

מועד א, סמסטר א' תשע"ה

חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט (כלומר ללא חיבור אינטרנט, מקלדת או טלפון). בכל מקרה די לתת תשובות מספריות בדיוק של עד שלוש ספרות אחרי הנקודה. יש לנמק (בקצרה) את התשובות.

יש לבחור 4 שאלות מתוך 5. (לא ניתן לענות על סעיפים בכל 5 השאלות) כל שאלה שווה 27-נקודות, אך הציון המקסימלי הוא 100.

זמן הבחינה: שלוש שעות

הבהרה: בכל מקום בו כתוב בטופס שרשרת מרקוב הכוונה לשרשרת מרקוב הומוגנית בזמן על מרחב מצבים סופי או בן מניה

1. נתונה אוכלוסיה של 6 פריטים, כל אחד מהם מסוג A או B. בכל דור מתחלפת כל האוכלוסיה ע"י שדוגמים עם חזרה 6 פריטים מהדור הקודם (כלומר כל פריט אוכלוסיה בדור הבא נבחר להיות מסוג A או B בסיכוי פרופורציונלי לחלק היחסי של A ו B בדור הקודם) ניתן לתאר את האוכלוסיה כשרשרת מרקוב.
 - א. תנו תאור של התפתחות האוכלוסיה כשרשרת מרקוב. (שימו לב כי ניתן למשל לתאר זאת כשרשרת עם 7 מצבים (מומלץ) או עם 64 מצבים באופן טבעי) (6)
 - ב. מהן הסתברויות המעבר? (7)
 - ג. תארו את מחלקות הקשירות של השרשרת. מיינו למצבים הם נשנים/חולפים? (5)
 - ד. מה הסיכוי שהחל מדור כלשהוא כל הפריטים יהיו מסוג B אם ידוע שבדור הראשון היו 4 פריטים מסוג A ושניים מסוג B? (9)

2. תהי (S, P) שרשרת מרקוב, ויהיו μ, ν שתי התפלגויות כלשהן על S. הוכיחו ש

$$\|\mu - \nu\|_{TV} \leq \|\mu P - \nu P\|_{TV}$$
 הסיקו שאם $\|\mu P - \nu P\|_{TV} \leq \epsilon$ הסיקו שאם $\|\mu P^n - \pi\|_{TV} \leq \epsilon$ פונקציה מונוטונית יורדת של n. (דרך אפשרית – צימודים) (27)

3. שאלה זו עוסקת בשרשרת מרקוב (הומוגנית) שמרחב המצבים שלה הוא כל השלמים.

נניח שמתקיים עבור כל $-\infty < i < \infty$ $P_{i,i+1} = 1 - P_{i,i-1}$. נניח גם שמתקיים $\lim_{i \rightarrow \infty} P_{i,i+1} = 0.5$. בכל אד מהסעיפים מותר להשתמש בכל תוצאה שהוכחה בכיתה, אך יש להוכיח כל אמירה אחרת. שימו לב כי יתכן ש $P_{i,i+1} = 1$ או $P_{i,i+1} = 0$ עבור חלק מערכי i.

 - א. האם יתכן שכל מצבי השרשרת הם נשנים? (7)
 - ב. האם יתכן שבשרשרת יש מצב נשנה יחיד? (6)
 - ג. האם יתכן שיש גם מצבים נשנים חיובית, גם מצבים נשנים אפס וגם מצבים חולפים בשרשרת? (7)
 - ד. כמה, לכל היותר, מחלקות קשירות של מצבים נשנים 0 יכולות להיות? (7)

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.15 & 0.25 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. נתונה שרשרת מרקוב

- א. מצאו את מחלקות הקשירות של השרשרת. (7)
 ב. מצאו את ההסתברויות הגבוליות $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{3,4}^{(n)}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{3,6}^{(n)}$ (10)
 ג. מצאו את תוחלת הזמן עד הקלטות במצבים נשנים כאשר נמצאים במצבים 3 ו 4. (10)

5. א. פוליה החליט לשנות מעט את תהליך הכד שלו. כעת בכל שלב, במקום להוציא כדור מקרי מהכד ולהחזיר 2 מאותו צבע במקום, הוא מחזיר 3 כדורים מאותו צבע (כלומר בכל שלב מתווספים לכד שני כדורים חדשים). נניח כעת שמתחילים עם כד בו 2 כדורים אדומים ואחד כחול.

- a. חשבו את הסיכוי שבשלב ה רביעי יישלף מהכד כדור אדום. (5)
 b. יהא X_n אחוז הכדורים האדומים בכד לאחר n שלבים. הראו שקיים משתנה מקרי X כך ש $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ בהסתברות 1. (10)
 ב. חשבו את תוחלת הזמן שלוקח להילוך מקרי סמטרי עצלן על $[0, N]$ שמתחיל ב k

($0 < k < n$) ובכל צעד נשאר במקום בסיכוי $\frac{1}{3}$, הולך ימינה בסיכוי $\frac{1}{3}$ והולך שמאלה בסיכוי $\frac{1}{3}$, עד שהוא פוגע ב 0 או n . (12)

בהצלחה