

מועד ב, סמסטר א' תשע"ה

חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט (כלומר ללא חיבור אינטרנט, מקלדת או טלפון). בכל מקרה די לתת תשובות מספריות בדיוק של עד שלוש ספרות אחרי הנקודה. יש לנמק (בקצרה) את התשובות.

יש לבחור 4 שאלות מתוך 5. (לא ניתן לענות על סעיפים בכל 5 השאלות) כל שאלה שווה 27-נקודות, אך הציון המקסימלי הוא 100.

זמן הבחינה: שלוש שעות

הבהרה: בכל מקום בו כתוב בטופס שרשרת מרקוב הכוונה לשרשרת מרקוב הומוגנית בזמן על מרחב מצבים סופי או בן מניה

1. שאלה זו עוסקת בשרשרות מרקוב בנות 5 מצבים $\{1,2,3,4,5\}$ ובמטריצות המעבר שלהן שיש להן כמובן 25 איברים.
הוכיחו או הפריכו על ידי מתן דוגמה נגדית כל אחת מהטענות הבאות:
א. אם יש בשרשרת 4 מצבים חולפים אז יש במטריצה לכל היותר 20 איברים חיוביים. (9)
ב. לא קיימת מטריצה כזאת שבה בדיוק 5 אברים הם חיוביים ($0 <$) והשרשרת היא בלתי פריקה ובלתי מחזורית (9)
ג. אם יש במטריצה בדיוק 5 אברים חיוביים אז קיים הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{i,i}^{(n)}$ לכל i . (9)
2. יהיו X_n סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים שווי התפלגות עם התפלגות
 $P\left(X_i = \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}, P(X_i = 2) = \frac{1}{3}$.
נגדיר $R_n = \prod_{i=1}^n X_i$.
א. הוכיחו ש R_n סדרת מרטינגל. (5)
ב. הוכיחו שיש סיכוי חיובי ש R_n לעולם לא מקבל ערך גדול מ 100. כלומר
 $P(R_n < 100 \quad \forall n) > 0$. (11)
(למעשה R_n שואף ל 0 בהסתברות 1, ואתם מוזמנים אך לא נדרשים להראות זאת כחלק מהשאלה).
ג. יהי $0 < p_1 < p_2 < 1$, ויהיו $\mu = \text{Bin}(n, p_1)$ ו $\nu = \text{Bin}(n, p_2)$ התפלגויות בינומיות.
מצאו צימוד (X, Y) של μ, ν כך ש $P(X \geq Y) = 1$. (11) (לא קשור לשני הסעיפים הקודמים)
3. תהא $\{X_n\}_{n \geq 0}$ שרשרת מרקוב על הטבעיים כך שלכל $i \neq 0$ מתקיים
 $0 < P(i, i+1) = 1 - P(i, i-1) = p_i \leq \frac{1}{2}$.
א. הראו שהשרשרת נשנית (רמז – השתמשו בצימוד) (13)
ב. עבור $p_i = p < \frac{1}{2}$ לכל i , הראו שההתפלגות
 $\pi(i) = \frac{1-2p}{2p(1-p)} \left(\frac{p}{1-p}\right)^i, i \neq 0, \pi(0) = \frac{1-2p}{2(1-p)}$ היא התפלגות סטציונרית עבור השרשרת. (14)

4. יהיה $\{X_n\}_{n \geq 0}$ הלוח מקרי מוטה על השלמים שמתחיל מ $X_0 = 1$ והלוח בכל צעד ימינה בסיכוי $\frac{1}{3}$ ושמאלה בסיכוי $\frac{2}{3}$. (כלומר $\{X_n\}_{n \geq 0}$ שרשרת מרקוב עם הסתברויות מעבר $P(X_{n+1} = X_n + 1) = \frac{1}{3}$, $P(X_{n+1} = X_n - 1) = \frac{2}{3}$)
- א. הוכיחו ש $R_n = 2^{X_n}$ ו $M_n = X_n + \frac{n}{3}$ הם מרטינגלים. (9)
- ב. מצאו את ההסתברות שההלוח יגיע ל N לפני שיגיע ל 0. (9)
- ג. מצאו את תוחלת הזמן שייקח להלוח עד שיפגע באחד מקצוות הקטע $[0, N]$. (כלומר את $E[\tau_{\{0, N\}}]$) (9)

5. נתונה שרשרת מרקוב על המצבים 1,2,3,4,5,6, שנתונה על ידי התהליך הבא:
- בכל שלב מטילים קובייה הוגנת (עם המספרים 1 עד 6. אם תוצאת הקוביה גבוהה מהמצב הנוכחי של השרשרת, עוברים למצב שהוא תוצאת הקוביה.
- אחרת נשארים במקום מלבד אם תוצאת הקוביה היא 2, ואז בכל מקרה עוברים למצב 2.
- |(לדוגמה: אם היינו ב 5 ויצא 3 נשאר ב 5, אם יצא 6 נעבור ל 6, ואם יצא 2 נעבור ל 2)|
- א. תארו את הסתברויות המעבר של השרשרת (אפשר במטריצה) (7)
- ב. מהם מחלקות הקשירות של השרשרת? מיינו למצבים נשנים וחולפים. (5)
- ג. מצאו את ההתפלגות הסטציונרית. (8)
- ד. מצאו את תוחלת זמן הפגיעה ב 3 כשמתחילים מ 4. (7)

בהצלחה