

Infinitesimal Calculus 2 for CS - 89133

Solutions of exercise 5

שאלה 1

$$\text{נתון טור חזקות: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{3^n \cdot \sqrt{n}}$$

מצאו את תחום ההתכנסות של הטור. (כולל בדיקת הקצוות.)

פתרון:

ברור ש- $x_0 = -1$ ו- $a_n = \frac{1}{3^n \cdot \sqrt{n}}$. לכן רדיוס ההתכנסות שווה ל-

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} \sqrt{n+1}}{3^n \cdot \sqrt{n}} = 3$$

לכן הטור מתכנס עבור כל x ששייך לקטע $(x_0 - 3, x_0 + 3) = (-4, 2)$ עבור $x = 2$ נקבל:

$$x = 2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$$

לכן הטור מתבדר. (לפי מבחן ההשוואה עם הטור ההאמוני המוכלל: $p = 1/2$). עבור $x = -4$ נקבל:

$$x = -4 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

לכן הטור מתכנס לפי מבחן Leibnitz. נמק !
מסקנה: תחום ההתכנסות שווה לקטע $[-4, 2)$.

שאלה 2

$$\text{נתון הטור } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\ln n}$$

מצאו את רדיוס ההתכנסות של הטור. מצאו את התחום המקסימלי שבו הטור מתכנס בהחלט. האם הטור מתבדר / מתכנס בתנאי / מתכנס בהחלט בקצוות קטע ההתכנסות ?

פתרון:

ברור ש- $x_0 = -1$, $a_n = \frac{1}{\ln n} > 0$ ולכן

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{1}{\ln n} \cdot \frac{\ln(n+1)}{1} = \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln n} = \frac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

רדיוס ההתכנסות שווה ל- $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 1$.

לפי משפט Cauchy-Hadamard נקבל ש:

I. בקטע $(x_0 - 1, x_0 + 1) = (-2, 0)$ הטור מתכנס בהחלט.

II. מחוץ לקטע $[-2, 0]$ הטור מתבדר.

בנוסף, עבור $x = 0$ נקבל טור מספרי חיובי מתבדר לפי מבחן ההשוואה. הסבר:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(0+1)^n}{\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \quad (1)$$

בנוסף, עבור $x = -2$ נקבל טור מספרי מתכנס לפי מבחן Leibniz. הסבר:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2+1)^n}{\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} < \infty$$

(באי-שוויון האחרון השתמשתי במשפט Leibniz עבור טור מתחלף.)

כמובן צריכים לבדוק ש- $b_n = \frac{1}{\ln n} > 0$ סדרה יורדת ומתכנסת לאפס).

בנוסף, הטור $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$ לא מתכנס בהחלט לפי שוויון (1).

מסקנה: תחום ההתכנסות שווה לקטע $[-2, 0)$.

תחום ההתכנסות בהחלט המקסימלי שווה לקטע $(-2, 0)$.

בקצה $x = -2$ הטור מתכנס בתנאי ובקצה $x = 0$ הטור מתבדר.

שאלה 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(x+2)^n}{n^2}$$

נתון הטור

מצאו את תחום ההתכנסות של הטור. (כולל בדיקת הקצוות).

האם הטור מתבדר / מתכנס בתנאי / מתכנס בהחלט בקצוות קטע ההיתכנסות?

פתרון :

ברור ש- $a_n = \frac{n+1}{n^2} > 0$, $x_0 = -2$ ולכן

$$\text{ולכן } \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{n+1}{n^2} \cdot \frac{(n+1)^2}{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

רדיוס ההתכנסות שווה ל- $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 1$

לפי משפט Cauchy-Hadamard נקבל ש :

I. בקטע $(x_0 - 1, x_0 + 1) = (-3, -1)$ הטור מתכנס בהחלט.

II. מחוץ לקטע $[-3, -1]$ הטור מתבדר.

בנוסף, עבור $x = -1$ נקבל טור מספרי חיובי מתבדר .
הסבר :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(-1+2)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) \cdot 1^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \infty \quad (1)$$

(השוויון (1) נכון לפי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$).

בנוסף, עבור $x = -3$ נקבל טור מספרי מתכנס.
הסבר :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(-3+2)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) \cdot (-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)}{n^2} < \infty$$

(בשוויון האחרון השתמשתי במשפט Leibniz עבור טור מתחלף.

כמובן צריכים לבדוק ש- $b_n = \frac{n+1}{n^2} > 0$ סדרה יורדת ומתכנסת לאפס).

בנוסף, הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)}{n^2}$ לא מתכנס בהחלט לפי שוויון (1).

מסקנה : תחום ההתכנסות שווה לקטע $[-3, -1)$.

בקצה $x = -3$ הטור מתכנס בתנאי ובקצה $x = -1$ הטור מתבדר.

שאלה 4

מצאו את רדיוס ההתכנסות / תחום ההתכנסות של טור החזקות הבא : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} (2x+1)^n$

פתרון:

ברור ש- $x_0 = \frac{-1}{2}$, $a_n = \frac{2^n}{n^2 3^n} > 0$ ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} (2x+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 3^n} (x + \frac{1}{2})^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2 3^n}} = \frac{2}{3} \quad \text{Cauchy}$$

לכן רדיוס ההתכנסות $R = \frac{3}{2}$. הטור מתכנס בהחלט בקטע $(x_0 - R, x_0 + R) = (-2, 1)$.

נבדוק את הקצוות: עבור $x = 1$ מקבלים את הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - מתכנס (החזקה $p = 2$ גדולה מ-1).

עבור $x = -2$ מקבלים את הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ - מתכנס בהחלט (לפי אותה הבדיקה).

לכן הטור מתכנס בהחלט ב- $[-2, 1]$.

שאלה 5

ידוע שטור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ מתכנס לכל $x \in (-1, 1]$ וסכומו שווה ל-

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

מצאו קירוב של $\ln 1.2$, כך שהשגיאה לא תעלה על 10^{-4} .

פתרו את השאלה בשתי דרכים:

א. בעזרת הערכה של השארית בצורת Lagrange.

ב. בעזרת טור Leibnitz מתאים.

פתרון:

הטור $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ מתכנס לכל $x \in (-1, 1]$, בפרט עבור $x = 0.2$ מקבלים טור מספרי

$$\ln(1.2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(0.2)^n}{n}$$

מתכנס: נסמן את הסכום החלקי מסדר n של הטור ב-

$$S_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

הסכום החלקי $S_n(0.2)$ מהווה קירוב של $\ln 1.2$.

השאלה דורשת למצוא את n כך שהשגיאה לא תעלה על 10^{-4} . נעריך את השגיאה בשתי דרכים.

א. הפולינום $S_n(x)$ שווה לפולינום Taylor-Maclaurin של הפונקציה $\ln(1+x)$ (פיתוח מסדר n

סביב הנקודה $a = 0$). נסמן את השארית מסדר n ב- $R_n(x) = \ln(1+x) - S_n(x)$. לפי הנוסחה של

Lagrange (חדו"א 1) נובע שקיים c בין $a = 0$ ל- $x = 0.2$ כך ש-

$$R_n(0.2) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (0.2)^{n+1}$$

אפשר לבדוק שלכל $k \geq 0$ שלם מתקיים

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} (k-1)! (1+x)^{-k}$$

ולכן

$$\begin{aligned} |\ln(1.2) - S_n(0.2)| &= |R_n(0.2)| = \\ &= \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (0.2)^{n+1} \right| = \left| \frac{(-1)^n n!}{(n+1)! (1+c)^{n+1}} (0.2)^{n+1} \right| = \frac{(0.2)^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}} \end{aligned}$$

$$< \frac{(0.2)^{n+1}}{(n+1)} < 10^{-4} \Rightarrow 5^{n+1} (n+1) > 10000$$

$0 < c < 0.9$

המספר הטבעי הקטן ביותר, שעבורו מתקיים אי-השוויון הנ"ל הוא $n=4$, כי

$$5^{4+1} (4+1) = 5^6 = 15625 > 10000$$

לכן הקירוב המבוקש יהיה:

$$\ln 1.2 \approx S_4(0.2) = \frac{0.2}{1} - \frac{(0.2)^2}{2} + \frac{(0.2)^3}{3} - \frac{(0.2)^4}{4}$$

ב. הטור המתכנס $\ln(1.2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(0.2)^n}{n}$ מקיים את התנאים של משפט Leibnitz.

נסמן ב- $a_n = (-1)^{n-1} \frac{(0.2)^n}{n}$ את האיבר הכללי של הטור. מתקיים:

$$|\ln(1.2) - S_n(0.2)| = |R_n(0.2)| \leq a_{n+1} = \left| (-1)^n \frac{(0.2)^{n+1}}{n+1} \right| = \frac{(0.2)^{n+1}}{n+1}$$

המשך הפתרון זהה לסעיף הקודם.

שאלה 6

נתון הטור $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{(n+1) \cdot 3^{n+1}}$

מצאו את תחום ההתכנסות של הטור. (כולל בדיקת הקצוות). האם הטור מתבדר/ מתכנס בתנאי / מתכנס בהחלט עבור $x = -1$ או $x = 5$? מצאו את סכום הטור עבור $x = 5$.

פתרון:

ברור ש- $x_0 = 2$ ו- $a_n = \frac{(-1)^n}{(n+1) \cdot 3^{n+1}}$ נובע ש-

ולכן רדיוס ההתכנסות שווה ל-

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{1}{(n+1)3^{n+1}} \frac{(n+2)3^{n+2}}{1} = 3 \frac{n+2}{n+1} = 3 \frac{1+\frac{2}{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = 3$$

לפי משפט Cauchy-Hadamard $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 3$ נקבל

בקטע $(x_0 - 3, x_0 + 3) = (-1, 5)$ הטור מתכנס בהחלט. מחוץ לקטע $[-1, 5]$ הטור מתבדר.

בנוסף, עבור $x = 5$ נקבל טור מספרי

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(5-2)^n}{(n+1) \cdot 3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{(n+1) \cdot 3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)} = \frac{\ln 2}{3}$$

(בשוויון האחרון השתמשתי במשפט Leibniz עבור הטור ההרמוני המתחלף).

בנוסף, עבור $x = -1$ נקבל טור מספרי

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1-2)^n}{(n+1) \cdot 3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-3)^n}{(n+1) \cdot 3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (-1)^n \frac{1}{(n+1)} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty$$

(השוויון האחרון נכון לפי מבחן האינטגרל של Cauchy עבור הטור ההרמוני הרגיל).

מסקנה: בקצה $x = 5$ הטור מתכנס בתנאי ובקצה $x = -1$ הטור מתבדר.

תחום ההתכנסות שווה לקטע $[-1, 5]$.

שאלה 7

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n} + 1 \right) x^n \quad \text{נתון הטור}$$

א. מצאו את רדיוס ההתכנסות / תחום ההתכנסות של הטור.

האם הטור מתבדר / מתכנס בתנאי / מתכנס בהחלט בקצוות קטע ההתכנסות?

ב. מצאו את סכום הטור עבור כל $|x| < 1$ ששיך לתחום ההתכנסות.

$$ג. מצאו טור Leibnitz שמתכנס לאינטגרל $\int_0^{1/2} S(x) dx$.$$

פתרון:

א. לפי הנתונים $x_0 = 0$, $a_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n} + 1 \right) = (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n}$, ולכן רדיוס ההתכנסות שווה ל-

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{n+1}{n}}{(-1)^{n+2} \frac{n+2}{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + (1/n))^2}{1 + (2/n)} = 1$$

לפי משפט Cauchy-Hadamard מסיקים שבתחום $(x_0 - R, x_0 + R) = (-1, 1)$ הטור מתכנס

בהחלט ועבור $|x| > 1$ הטור מתבדר. נבדוק את הקצוות $x = \pm 1$. מציבים ומקבלים טור מספרי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n} + 1 \right) (\pm 1)^n$$

ב. ידוע ש- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ לכל $-1 < x \leq 1$. בנוסף,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n = x - x^2 + x^3 - x^4 + \dots = x(1 - x + x^2 - x^3 + \dots) = x \frac{1}{1+x}, \quad -1 < x < 1$$

לכן אם נחבר 2 הטורים נקבל שלכל $|x| < 1$ מתקיים:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n} + 1 \right) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n = \ln(1+x) + x \frac{1}{1+x}$$

ג. נבצע אינטגרציה של סכום של טור חזקות:

$$\int_0^{1/2} S(x) dx = \int_0^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_0^{1/2} x^n dx \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^{1/2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}(n+1)}$$

נציב את a_n ומקבלים שהטור המתחלף $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}n}$ מתכנס לאינטגרל $\int_0^{1/2} S(x) dx$, מ.ש.ל.

שאלה 8

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{6^n n} x^n = \frac{1}{6} x - \frac{1}{72} x^2 + \frac{1}{648} x^3 - \dots$$

נתון הטור

א. מצאו את רדיוס ההתכנסות / תחום ההתכנסות של הטור.
האם הטור מתבדר / מתכנס בתנאי / מתכנס בהחלט בקצוות קטע ההתכנסות ?
ב. מצאו את סכום הטור עבור כל x ששיך לתחום ההתכנסות.

ג. מצאו טור Leibnitz שמתכנס ל- $I = \int_0^1 S(x) dx$ ונמקו למה המספר $\frac{1}{6 \cdot 2} - \frac{1}{36 \cdot 6} = \frac{17}{216}$

מהווה קרוב של האינטגרל I .

פתרון:

א. לפי הנתונים $x_0 = 0$, ולכן רדיוס ההתכנסות שווה ל- $a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{6^n n}$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{1}{6^n n}}{(-1)^{n+2} \frac{1}{6^{n+1} (n+1)}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} 6 \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 6 \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 6$$

לפי משפט Cauchy-Hadamard מסיקים שבתחום $(x_0 - R, x_0 + R) = (-6, 6)$ הטור מתכנס בהחלט ועבור $|x| > 6$ הטור מתבדר. נבדוק את הקצוות $x = \pm 6$. אם $x = 6$ מציבים ומקבלים טור הרמוני

מתחלף שמתכנס בתנאי: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{6^n n} 6^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln 2$. אם $x = -6$ מציבים ומקבלים

טור הרמוני שמתבדר: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{6^n n} (-6)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{1}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = -\infty$

ב. ידוע ש- $\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^n}{n} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots$ לכל $-1 < t \leq 1$. מקבלים שאם

$$-6 < x \leq 6 \text{ או } -1 < t = \frac{x}{6} \leq 1 \text{ ולכן}$$

$$S(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{6}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x/6)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{6^n n} x^n$$

ג. נבצע אינטגרציה של סכום של טור חזקות:

$$\int_0^1 S(x) dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_0^1 x^n dx \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{6^n n(n+1)}$$

מצאנו טור Leibnitz שמתכנס ל- $I = \int_0^1 S(x) dx$. בנוסף, אם בוחרים רק 2 איברים הראשונים של

$$\text{הטור מקבלים קירוב ריבועי של } I : \frac{1}{6 \cdot 2} - \frac{1}{36 \cdot 6} = \frac{17}{216} \quad (\text{השגיאה קטנה מ- } \frac{1}{6^3 \cdot 3 \cdot (3+1)})$$

שאלה 9

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n!}\right) \frac{x^n}{2^n} \quad \text{נתון הטור}$$

א. מצאו את רדיוס ההתכנסות ותחום ההתכנסות של הטור.

האם הטור מתבדר / מתכנס בתנאי / מתכנס בהחלט בקצוות קטע ההתכנסות ?

ב. מצאו את סכום הטור עבור כל $0 < x < 2$.

ג. מצאו טור מספרי שמתכנס לאינטגרל $\int_0^1 S(x) dx$.

פתרון:

לפי הנתונים $x_0 = 0$, $a_n = \left(1 - \frac{1}{n!}\right) \frac{1}{2^n}$ (*). לכן רדיוס ההתכנסות שווה ל-

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\left(1 - \frac{1}{n!}\right) \frac{1}{2^n}}{\left(1 - \frac{1}{(n+1)!}\right) \frac{1}{2^{n+1}}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \frac{1 - \frac{1}{n!}}{1 - \frac{1}{(n+1)!}} = 2$$

Cauchy-Hadamard לפי משפט

מסיקים שבתחום $(x_0 - R, x_0 + R) = (-2, 2)$ הטור מתכנס בהחלט ועבור $|x| > 2$ הטור מתבדר.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n!}\right) \frac{(\pm 2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n!}\right) (\pm 1)^n$$

בקצוות מציבים $x = \pm 2$ ומקבלים טור מספרי:

זה טור מתבדר כי האיבר הכללי לא שואף לאפס.

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots \quad \text{כל } |t| < 1 \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots$$

ב. ידוע ש-

לכן לכל $|x| < 2$ מתקיים:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n!}\right) \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^n}{n!} = \frac{1}{1-(x/2)} - e^{x/2}$$

ג. לפי אינטגרציה של טור חזקות נקבל טור מספרי שמתכנס לאינטגרל:

$$\int_0^1 S(x) dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \int_0^1 x^n dx \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n!}\right) \frac{1}{2^n}$$

שאלה 10

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1+n+n!)}{(n+1)!} \quad 2. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n-1)} \quad 1. \quad \text{מצאו את הסכום של הטורים:}$$

פתרון:
א.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n-1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(2n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2}{2n-1} - \frac{1}{n} \right) = \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \\ &= 2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right) - \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right) = \\ &\stackrel{Abel}{=} 2 \arctan x \Big|_{x=1} - \ln(1+x) \Big|_{x=1} = 2 \frac{\pi}{4} - \ln 2 = \frac{\pi}{2} - \ln 2 \end{aligned}$$

ב.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1+n+n!)}{(n+1)!} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(1+n)+n!}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{(n+1)!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots \right) - \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right) = e^{-1} - \ln 2 \end{aligned}$$

שוויון אחרון נכון כי:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad x \in \mathbf{R}; \quad \ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad -1 < x \leq 1$$

שאלה 11

$$\text{נתון הטור} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} \dots$$

א. מצאו את רדיוס ההתכנסות / תחום ההתכנסות של הטור.
האם הטור מתבדר / מתכנס בתנאי / מתכנס בהחלט בקצוות קטע ההתכנסות ?

ב. הוכיחו שסכום הטור שווה ל- $\frac{\ln(1+x)}{x}$, לכל $0 < |x| < 1$.

$$\text{ג. בדקו ש-} \left| \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx - \frac{31}{36} \right| < 0.0625$$

פתרון:

א. $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, ולכן רדיוס ההתכנסות שווה ל-

$$\text{Cauchy-Hadamard} \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{n+1}}{\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+(2/n)}{1+(1/n)} = 1$$

מסיקים שבתחום $(x_0 - R, x_0 + R) = (-1, 1)$ הטור מתכנס בהחלט ועבור $|x| > 1$ הטור מתבדר.
נבדוק את הקצוות $x = \pm 1$.

$$\text{עבור } x = 1 \text{ מקבלים טור מספרי} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots$$

זה הטור ההרמוני מתחלף ולפי משפט Leibnitz הטור מתכנס בתנאי.

$$\text{עבור } x = -1 \text{ מקבלים טור מספרי} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \dots$$

זה הטור ההרמוני ולפי מבחן האינטגרל של Cauchy הטור מתבדר.

$$\text{ב. ידוע ש-} \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots, -1 < x \leq 1$$

$$\text{לכן לכל } 0 < |x| < 1 \text{ מקבלים ש-} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1} \quad \text{מ.ש.ל.}$$

$$\text{ג. בסעיף הקודם הוכחנו ש-} 0 \leq x \leq 1, \quad \frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}, \quad \text{לפי אינטגרציה איבר איבר}$$

מקבלים:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^n \frac{x^n}{n+1} dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \dots \end{aligned}$$

קיבלנו טור Leibnitz ולכן $\left| \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx - \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \right) \right| \leq \frac{1}{4^2}$ ז"א

$$\left| \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx - \frac{31}{36} \right| < 0.0625, \text{ מ.ש.ל.}$$

שאלה 12

נתון הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)} = x - \frac{x^2}{2! \cdot 2} + \frac{x^3}{4! \cdot 3} - \frac{x^4}{6! \cdot 4} \pm \dots$

א. מצאו את רדיוס ההתכנסות / תחום ההתכנסות של הטור.

ב. הוכיחו שסכום הטור שווה ל- $f(x) = \int_0^x \cos(\sqrt{t}) dt$, לכל $x > 0$.

ג. הוכיחו ש- $\left| \int_0^1 \cos(\sqrt{t}) dt - \frac{55}{72} \right| \leq \frac{1}{6! \cdot 4} = \frac{1}{2880}$

ז"א המספר $I = \frac{55}{72}$ מהווה קירוב של האינטגרל $\int_0^1 \cos(\sqrt{t}) dt$ והשגיאה לא עולה על $\frac{1}{2880}$.

פתרון:

נשתמש בטור Mac-Laurin ידוע:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \pm \dots$$

מכאן:

$$\cos \sqrt{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{t^{2n}}{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{t^{2n}}{2n} = 1 - \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{4!} \pm \dots \quad (t \geq 0)$$

נבצע אינטגרציה איבר-איבר:

$$\int_0^x \cos(\sqrt{t}) dt = \int_0^x \cos(\sqrt{t}) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{t^{2n}}{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{t^{2n}}{2n} dt$$

כלומר:

$$\int_0^x \cos(\sqrt{t}) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \frac{t^{n+1}}{(n+1)} \Big|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)}$$

בפרט, רדיוס ההתכנסות שווה ל- $R = \infty$.

$$g. \left| \int_0^1 \cos(\sqrt{t}) dt - \frac{55}{72} \right| \leq \frac{1}{6! \cdot 4} = \frac{1}{2880}$$

לפי הטור שמצאנו בסעיפים א'-ב' נובע ש- :

$$\int_0^x \cos(\sqrt{t}) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)} = x - \frac{x^2}{2! \cdot 2} + \frac{x^3}{4! \cdot 3} \pm \dots$$

$$\int_0^1 \cos(\sqrt{t}) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \frac{1^{n+1}}{(n+1)} = 1 - \frac{1}{2! \cdot 2} + \frac{1}{4! \cdot 3} \pm \dots = \frac{55}{72} + R_3(1)$$

$$|R_3(1)| \leq \frac{1}{6! \cdot 4} = \frac{1}{2880} \quad \text{Leibnitz לפי משפט}$$

שאלה 13

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2n+1} = 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{5} - \frac{x^3}{7} \dots$$

א. מצאו את רדיוס ההתכנסות / תחום ההתכנסות של הטור.
האם הטור מתבדר / מתכנס בתנאי / מתכנס בהחלט בקצוות קטע ההתכנסות ?

$$b. \text{ הוכיחו שסכום הטור שווה ל- } \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \text{ לכל } 0 < x \leq 1.$$

$$g. \left| \int_0^1 \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx - \frac{76}{105} \right| < 0.1111 \dots$$

פתרון:

$$a. \quad a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}, \quad x_0 = 0 \quad \text{ולכן רדיוס ההתכנסות שווה ל-}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + (3/2n)}{1 + (1/2n)} = 1$$

Hadamard מסיקים שבתחום $(x_0 - R, x_0 + R) = (-1, 1)$ הטור מתכנס בהחלט ועבור $|x| > 1$ הטור מתבדר. נבדוק את הקצוות $x = \pm 1$. עבור $x = -1$ מקבלים טור מספרי מתבדר :

$$(*) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} > \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

$$\text{עבור } x = 1 \text{ מקבלים טור מספרי } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots \text{ זה טור מתחלף ו-}$$

$$u_n = \frac{1}{2n+1} > u_{n+1} = \frac{1}{2n+3}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

ב.

ידוע ש- $-1 \leq x \leq 1$, $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$, לכן, לכל $0 < x \leq 1$:

$$\text{מ.ש.ל.}, \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{x}^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+0.5}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2n+1} \quad (**)$$

ג.

רוצים לבדוק האם : $\frac{76}{105} - 0.1111... < \int_0^1 \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx < \frac{76}{105} + 0.1111... = 0.834...$: (***)

לפי אינטגרציה איבר איבר של (**) מקבלים :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2n+1} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^n}{2n+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(2n+1)} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 1} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots \end{aligned}$$

קיבלנו טור Leibnitz ולכן : $\left| \int_0^1 \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx - \left(\frac{1}{1 \cdot 1} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} \right) \right| \leq \frac{1}{4 \cdot 7}$, נ"א

$$0.86 < \int_0^1 \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx < 0.94 \quad \text{מסיקים ש-} \left| \int_0^1 \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx - 0.9 \right| < \frac{1}{25} = 0.04$$

ולכן (**) לא נכון.

שאלה 14

א. מצאו את תחום ההתכנסות של טור החזקות הבא : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{\sqrt{3n+1}}$.

חקרו את ההתנהגות של הטור בקצוות של תחום ההתכנסות.

ב. נסמן $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{\sqrt{3n+1}}$, לכל $-1 < x < 0$. מצאו סדרה של מספרים ממש $(a_n)_{n \geq 0}$.

כך שהנגזרת של $f(x)$ שווה ל- $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x + \frac{1}{2} \right)^n$.

פתרון:

א.

א. $a_n = \frac{2^n}{\sqrt{3n+1}}$, נשתמש בקריטריון Cauchy : לכן $x_0 = -0.5$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{\sqrt{3n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x+0.5)^n}{\sqrt{3n+1}}$

(בגלל ש- $1 \leq \sqrt[n]{3n+1} \leq \sqrt[n]{4n} = \sqrt[n]{4} \sqrt[n]{n} \rightarrow 1$) $(a_n)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{2^n}{\sqrt{3n+1}} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{2}{(\sqrt[n]{3n+1})^{\frac{1}{2}}} \rightarrow 2$

מכאן מקבלים שרדיוס ההתכנסות שווה ל- $R = \frac{1}{2}$.

בדיקת הקצוות :

$$\begin{aligned} x=0 & \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}} < - \quad \text{הטור מתבדר (השוואה עם } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \text{)} \\ x=-1 & \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{3n+1}} < - \quad \text{הטור מתכנס כטור Leibnitz (} \downarrow 0 \text{)} \\ & \quad \text{סיכום : הטור מתכנס ב- } [-1,0). \end{aligned}$$

ב.

לכל $-1 < x < 0$ מתקיים $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{\sqrt{3n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x+0.5)^n}{\sqrt{3n+1}}$ ולכן לפי גזירה איבר איבר, נקבל :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x+0.5)^n}{\sqrt{3n+1}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{2^n (x+0.5)^n}{\sqrt{3n+1}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{3n+1}} \frac{d}{dx} \left((x+0.5)^n \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{3n+1}} n (x+0.5)^{n-1} = \sum_{m=n-1}^{\infty} \frac{2^{m+1}}{\sqrt{3m+4}} (m+1) (x+0.5)^m \end{aligned}$$

ולכן

$$a_m = \frac{2^{m+1}}{\sqrt{3m+4}} (m+1).$$