

Infinitesimal Calculus 2 for CS - 89133

פתרון תרגיל מספר 7 – גבולות, רציפות ונגזרות של פונקציות בשני משתנים

שאלה 1

בדקו האם לפונקציות הבאות קיים גבול ב נק' $(0,0)$

פתרון

א. $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

ולכן הגבול לא קיים.

ב. $f(x, y) = \frac{2x^3 - 3y}{3x^3 + 2y}$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{2x^3}{3x^3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} \frac{-3y}{2y} = -\frac{3}{2}$$

ולכן הגבול לא קיים.

ג. $f(x, y) = \frac{\sin xy}{y}$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{xy} \cdot y = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{xy} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y = 1 \times 0 = 0$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{y^2 + x^4} \quad \text{ד.}$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=kx}} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 kx}{k^2 x^2 + x^4} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{kx}{k^2 + x^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} f(x, y) = 0$$

ולכן לפי כל הישרים מקבלים גבול 0,

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x^2}} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 x^2}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2} \quad \text{אבל אם נבדוק את פרבולה:}$$

ולכן הגבול לא קיים.

$$f(x, y) = \frac{x^3 + xy^2}{x^2 + y^4} \quad \text{ה.}$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=kx}} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + xk^2 x^2}{x^2 + k^4 x^4} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x(1+k^2)}{1+k^4 x^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} f(x, y) = 0$$

ולכן לפי כל הישרים מקבלים גבול 0,

$$\text{אבל: } \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=\sqrt{x}}} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{ולכן הגבול לא קיים.}$$

שאלה 2

האם ניתן להגדיר את הפונקציות הבאות בנקודה (0,0) כרציפות? אם כן מהו הערך בנקודה זו כך שהפונקציה תהינה רציפה?

פתרון

$$f(x, y) = \frac{2x + 3y}{3x - 2y} \quad \text{א.}$$

לא ניתן להגדירה כרציפה בראשית :

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} \frac{2x + 3y}{3x - 2y} = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x=0}} \frac{0 + 3y}{0 - 2y} = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{2x + 3y}{3x - 2y} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=0}} \frac{2x + 0}{3x - 0} = \frac{2}{3}$$

לכן לפונקציה לא קיים הגבול בראשית.

$$f(x, y) = xy \cos \frac{1}{x^2 + y^2} \quad \text{ב.}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \cos \frac{1}{x^2 + y^2} = 0 : \text{נובע ממשפט הסנדוויץ' : } |xy \cos \frac{1}{x^2 + y^2}| \leq |xy|$$

לכן ניתן להגדירה כרציפה : נגדיר : $f(0,0) = 0$

$$f(x, y) = \frac{2x^3}{3x^2 + 4y^2} \quad \text{ג.}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^3}{3x^2 + 4y^2} = 0 : \text{נובע ממשפט הסנדוויץ' : } \left| \frac{2x^3}{3x^2 + 4y^2} \right| \leq |x|$$

לכן ניתן להגדירה כרציפה : נגדיר : $f(0,0) = 0$

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^4}{x^4 + y^2} \quad \text{ד.}$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} \frac{x^2 + y^4}{x^4 + y^2} = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x=0}} \frac{0 + y^4}{0 - y^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{x^2 + y^4}{x^4 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=0}} \frac{x^2 + 0}{x^4 - 0} = \infty$$

לכן לפונקציה לא קיים הגבול בראשית ולכן לא ניתן להגדירה כרציפה בראשית.

שאלה 3

חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציות הבאות :

$$f(x, y) = xy + 3x^2 - 5y^5 \quad \text{א.}$$

$$f(x, y) = e^{x/y} \quad \text{ב.}$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{ג.}$$

$$f(x, y) = \frac{x}{y} - \frac{y}{x} \quad \text{ד.}$$

$$f(x, y) = e^{\arctg \frac{x}{y}} \quad \text{ה.}$$

פתרון

$$f_x = y + 6x$$

$$f_y = x - 25y^4 \quad \text{א.}$$

$$f_x = e^{x/y} \frac{1}{y}$$

$$f_y = e^{x/y} \frac{-x}{y^2}$$

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f_x = \frac{1}{y} + \frac{y}{x^2}$$

$$f_y = -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x}$$

$$f_x = e^{\arctg \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y}$$

$$f_y = e^{\arctg \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{-x}{y^2}$$

שאלה 4

$$(0,0) \ni f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^3 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה

פתרון

$$f_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x - 0} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{y - 0} = 0$$

שאלה 5

$$f(x,y) = y^2 \sin(x^2 - y^2) \quad \text{מקיימת את המשוואה: } y^2 f_x + xy f_y = 2xf$$

פתרון

$$f_x = 2xy^2 \cos(x^2 - y^2) \quad ($$

$$f_y = 2y \sin(x^2 - y^2) - 2y^3 \cos(x^2 - y^2):$$

נחשב קודם את הנגזרות:

ולכן

$$y^2 2xy^2 \cos(x^2 - y^2) + xy(2y \sin(x^2 - y^2) - 2y^3 \cos(x^2 - y^2)) = 2xf$$

שאלה 6

הוכיחו כי הפונקציה $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ מקיימת את המשוואה: $y f_x - x f_y = 0$.

פתרון

נחשב קודם את הנגזרות:

$$f_x = \frac{2x}{(x^2 + y^2)}$$

$$f_y = \frac{2y}{(x^2 + y^2)}$$

ולכן

$$y f_x - x f_y = y \frac{2x}{(x^2 + y^2)} - x \frac{2y}{(x^2 + y^2)} = 0$$