

חשבון אינפי 2 למדמ"ח - 89133 – פתרון תרגיל בית מס' 8

1.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h \cdot 0}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{k^2} - 0}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0}{k} = 0$$

ולכן הנגזרות חלקיות קיימות.

נבדוק האם פונקציה רציפה: ניקח $y=kx$ ונקבל:

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x, kx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 k}{x^2 (1 + k^2)} = \frac{k}{1 + k^2}$$

הגבול תלוי ב- k ולכן הגבול לא קיים. כלומר הפונקציה לא רציפה ולכן גם לא דיפרנציאבילית.

3.

$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(x \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right) + \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(y \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right); \\ 0 \leq \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1; \quad 0 \leq \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

לכן הפונקציה רציפה ב- $(0,0)$.

האם היא דיפרנציאבילית? נחשב את:

$$\left\{ \begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h} = 1; & f_y(0,0) &= 1 \\ f(h,k) &= f_x(0,0)h + f_y(0,0)k + R(h,k) \\ f(h,k) &= f_x(0,0)h + f_y(0,0)k + \varepsilon(h,k) \cdot \sqrt{h^2 + k^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$R(h,k) = \varepsilon(h,k) \sqrt{h^2 + k^2} = f(h,k) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k = \frac{h^3 + k^3}{h^2 + k^2} - h - k \Rightarrow$$

$$\varepsilon(h,k) = \frac{R(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = -\frac{kh(k+h)}{(h^2 + k^2)^{3/2}}.$$

ניקח מסלול קווי בשיפוע α :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h, \alpha h) = -\frac{\alpha(1+\alpha)}{(1+\alpha^2)^{3/2}} \Leftarrow k = \alpha h$$

ולכן לא קיים הגבול $\lim_{(h,k) \rightarrow 0} \varepsilon(h,k)$.

לכן הפונקציה אינה דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$.

$$4. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 \quad \text{כי ה-} \sin \text{ חסום והוא מוכפל בפונקציה השואפת ל-0.}$$

לכן הפונקציה רציפה ב- $(0,0)$.

נבדוק האם היא דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{\sqrt{h^2}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h \sin \frac{1}{\sqrt{h^2}}) = 0 \\ f_y(0,0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(h,k) &= \frac{R(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{f(h,k) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)h}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{(h^2+k^2) \sin \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \\ &= (h^2+k^2)^{1/2} \sin \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \xrightarrow{(h,k) \rightarrow (0,0)} 0 \end{aligned}$$

(נמק את השלב האחרון !)

ולכן פונקציה דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$.

5. f, f_x, f_y – רציפות בנקודה $(1,2)$ כי הן מכפלה, סכום והרכבה של פונקציות רציפות.

לפי משפט על דיפרנציאביליות של פונקציה - הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(1,2)$.

6. בדוק דיפרנציאביליות של $f(x,y) = (x+y)\sqrt{x^2+y^2}$ בנקודה $(0,0)$
נחשב את הערך של הנגזרות החלקיות לפי הגדרת הנגזרת:

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \sqrt{(\Delta x)^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} |\Delta x| = 0$$

באותו אופן (מסימטריות 2 המשתנים) נקבל: $f_y(0,0) = 0$.
אזי לפי הגדרת הדיפרנציאל:

$$\begin{aligned} f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) &= f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \Rightarrow \\ \varepsilon &= \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \frac{(\Delta x + \Delta y)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \Delta x + \Delta y \end{aligned}$$

קבלנו ש- $\varepsilon = \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$, כאשר $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)$.

לכן הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית הצירים.

7. בדוק/י רציפות ודיפרנציאביליות הפונקציה

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

בנקודה $(0, 0)$.

נבדוק האם פונקציה רציפה. ניקח מסלול קווי $y=kx$ ונקבל:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, kx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - k^2 x^2}{x^2 + k^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - k^2)x^2}{(1 + k^2)x^2} = \frac{(1 - k^2)}{(1 + k^2)}$$

גבול הפונקציה תלוי במסלול ההתקרבות לראשית, כלומר תלוי בשיפוע הישר לכן הפונקציה אינה רציפה ולכן אינה דיפרנציאבילית.

8. בדוק/י דיפרנציאביליות הפונקציה: $f(x, y) = 2 \ln(x^2 + y^2 + 1)$ בכל תחום הגדרתה.

תחום ההגדרה שווה ל- $D = \mathbf{R}^2$. ברור ש-

$$f_x(x, y) = 2 \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad f_y(x, y) = 2 \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}$$

כיוון שהנגזרות החלקיות רציפות בכל תחום הגדרת הפונקציה הפונקציה דיפרנציאבילית.

9. נתונה הפונקציה:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y \sin x}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

א. חשבי/י נגזרות חלקיות של הפונקציה בנקודה $(0, 0)$.

נחשב נגזרות חלקיות לפי הגדרת הנגזרת:

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta y \sin 0}{0^2 + \Delta y^2} - 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

ב. בדוק/י רציפות הפונקציה. נחשב את הגבול:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y \sin x}{x^2 + y^2}$$

ניקח $y=kx$ ונקבל:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, kx) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx \sin x}{x^2 + k^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx \sin x}{(k^2 + 1)x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k \sin x}{(k^2 + 1)x} = \\ &= \frac{k}{(k^2 + 1)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{k}{(k^2 + 1)} \end{aligned}$$

קיבלנו תלות במסלול ולכן הגבול אינו קיים כלומר הפונקציה אינה רציפה.

ג. בדוק/י דיפרנציאביליות הפונקציה.

הפונקציה אינה רציפה בנקודה $O = (0, 0)$ ולכן אינה דיפרנציאבילית בנקודה $O = (0, 0)$.