

חשבון אינפי 2 למדמ"ח - 89133 – תרגיל בית מס' 9

שאלה 1

בצעו קירוב לינארי של פונקציה מתאימה בסביבת נקודה מתאימה, על מנת לחשב את הערך המקורב של הביטויים הבאים (בחישובים הניחו כי $e \approx 2.71$, $\pi \approx 3.14$):

א. $1.08^{3.96}$ ב. $2.68^{\sin 0.05}$

שאלה 2

תהי $f(x, y)$ פונקציה דיפרנציאבילית בסביבה של הנקודה $(3, 4)$. הקירוב הלינארי בסביבה של הנקודה נתון ע"י הנוסחה $f(x, y) \approx 0.6x + 0.8y$. מצאו את הקירוב הלינארי בסביבה של $(3, 4)$ עבור הפונקציות הבאות:

א. $g(x, y) = 3f(x, y)$ ב. $h(x, y) = f^2(x, y)$

שאלה 3

באיזה כיוון הנגזרת הכיוונית בנקודה $(0, 1)$ של הפונקציה $f(x, y) = ye^{-xy}$ שווה ל-1?

שאלה 4

נתונה הפונקציה $f(x, y) = x^3 - xy^2 - 4x^2 + 3x + x^2y$.

א. מצאו את הערך המקסימאלי ואת הערך המינימאלי של נגזרת כיוונית

$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(0.5, 1)$ ביחס לווקטור הכיוון $\vec{s}$, שעבורו $\|\vec{s}\| = 1$. מהם הכיוונים, שבהם מתקבלים ערכים קיצוניים אלה?

ב. מצאו את כל הכיוונים $\vec{s}$ (ווקטור יחידה), כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(0.5, 1) = 0$.

שאלה 5

עבור הפונקציה הבאה חשבו את $\frac{df}{dt}$ ע"י שימוש בכלל השרשרת:

$$f(x, y) = e^{3x+2y} \text{ , כאשר } x = \cos t, y = t^2.$$

שאלה 6

חשבו לפי הגדרה את הנגזרות המעורבות מסדר שני עבור הפונקציה הבאה בנקודה

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases} : (0, 0)$$

האם $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$?

שאלה 7

הוכיחו כי הפונקציה $z = 2 \cos^2\left(y - \frac{x}{2}\right)$ מקיימת את המשוואה: $2z_{xx} + z_{xy} = 0$ בכל המישור הממשי.

שאלה 8

תהינה $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות גזירות ברציפות עד סדר 2 כולל. נגדיר פונקציה $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ע"י: $h(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$ (פרמטר ממשי חיובי ממש).

הוכיחו כי h מקיימת את משוואת הגלים: $\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$.

שאלה 9

מצאו משוואה פרמטרית של הישר המשיק לקו החיתוך של המשטחים $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ו- $z = x^2 + y^2$ בנקודה $(-1, 1, 2)$. (רמז: המשיק המבוקש הינו ישר החיתוך בין המישורים המשיקים למשטחים הנתונים בנקודה.)

שאלה 10

יהי σ משטח הנתון על ידי המשוואה $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{c}$, כאשר $c > 0$ קבוע. יהי π מישור משיק ל- σ בנקודה (x_0, y_0, z_0) .

א. הוכיחו כי π נתון על ידי המשוואה $\frac{x}{\sqrt{x_0}} + \frac{y}{\sqrt{y_0}} + \frac{z}{\sqrt{z_0}} = \sqrt{c}$.

ב. הוכיחו כי סכום המרחקים מראשית הצירים לנקודות החיתוך של π עם צירי הקואורדינטות הינו קבוע.