

זהו אוסף של תרגילים משנים קודמות שכולל גם תרגילי בית שיכולים להיות קשים יותר מהרמה בבחינה, אך גם תרגילים שמתאימים לבחינה. ייתכן שיש מקומות בהם החומר שונה מעט ממה שלמדן השנה, אם כי ניסיתי למחוק שאלות לא רלוונטיות. בפרט יש פה מעט יותר על שרשראות רציפות ממה שעשינו אך לא בהרבה.

שאלות 1 ו 4 ממבחן

http://www.shlomir.com/courses8/course13/stochastic_exams/exam_10_b.pdf

שאלות 1 ו 3 מ

http://www.shlomir.com/courses8/course13/stochastic_exams/exam_11_b.pdf
שימו לב לשאלה מתרגיל 3 על תורים, ולתכונות של התפלגות פואסון.

בכלל מומלץ מאוד להסתכל ב

http://www.shlomir.com/courses8/course13/stochastic_exams/sto_exams.html

ולפתור את השאלות על החומר שלמדנו (לא תהליכי הסתעפות, אבל רוב הדברים כן עסקנו בהם)

1. תהליך לידה ומוות הוא תהליך מרקובי בזמן רציף, המקבל ערכים טבעיים (גודל האוכלוסיה) המתואר ע"י יותר אינפיטיסימלי כדלהלן:

$$A(n, n+1) = \lambda, A(n+1, n) = \mu, A(n, n) = -\lambda - \mu, A(m, n) = 0 \text{ if } |m - n| > 1.$$

כאשר $\lambda > 0$ נקרא קצב הלידה, $\mu > 0$ נקרא קצב המוות.

- א. מתי קיימת התפלגות סטציונרית לתהליך?
- ב. מהי ההתפלגות הסטציונרית?

2. א. מהמר משחק במשחק הבא: זורקים מטבע הוגן עד שהוא נופל 3 פעמים רצוף על עץ. כשזה קורה, המהמר מרוויח 12 ₪. כל הטלת מטבע (כולל ההטלה בה הוא זוכה) עולה למהמר 1 ₪. האם המשחק מאוזן? מה תוחלת הרווח או הפסד של המהמר? (השתמשו בשרשראות מרקוב)

ב. כעת ניתנת למהמר גם אפשרות להפסיק באיזה שלב שירצה. האם הוא יכול להגדיל את תוחלת הרווח?

3. תהי X_n שרשרת מרקוב סופית עם מטריצת מעבר דו-סטוכסטית (סכום של כל עמודה וגם של כל שורה הוא 1). הראו שההתפלגות האחידה היא סטציונרית עבור השרשרת. בכד יש N כדורים בכל רגע. בכל שלב לוקחים כדור באקראי

מהכד ואז

זורקים מטבע p עבור $0 < p < 1$ נתון מראש (קבוע לכל השלבים). אם יוצא עץ מכניסיםלכד כדור לבן במקום הכדור שנלקח, ואם יוצא פלי מכניסים במקומו כדור שחור. יהי $\{X_n\}$ מספר הכדורים הלבנים שבכד לאחר השלב ה n .

א. האם X_n שרשרת מרקוב?

ב. מה מחלקות הקשירות שלה, איזה מצבים הם נשנים ואיזה חולפים. האם יש מחזור גדול מ 1 לאחד המצבים?

ג. מה הסתברויות המעבר?

ד. חשבו את ההתפלגות הסטציונרית עבור $N=2$.

ה. נחשו את ההתפלגות הסטציונרית עבור N כללי והוכיחו שהיא אכן סטציונרית.
ו. אם נקח $p=1$, מה תוחלת הזמן עד שכל הכדורים בכד יהיו לבנים, אם בתחילה היו רק כדורים שחורים בכד.

4. (א) הראו שלגבי כל מצב בשרשרת מרקוב בלתי פריקה בעלת מספר סופי של מצבים מתקיים

שהסכום לא להגיע אליו עד שלב m שואף לאפס מעריכית, זאת אומרת שקיים פרמטר $0 \leq a < 1$ שהסתברות זאת קטנה מ a^m לכל $m > M$, M סופי וקבוע.
(ב) הראו שבסעיף א' לא ניתן לוותר על סופיות מספר המצבים.

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.15 & 0.25 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6. נתונה שרשרת מרקוב

(א) מצאו את ההסתברויות הגבוליות $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{3,6}^{(n)}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{3,4}^{(n)}$.
(ב) מצאו את תוחלת הזמן עד הקלטות במצבים נשנים כאשר נמצאים במצבים 3 ו 4.

7. נתונים שני כדים שבכל אחד מהם יש N כדורים. מתוך $2N$ הכדורים N כדורים הם לבנים ו N כדורים הם שחורים. בכל שלב מוגרל אקראית כדור מכל כד ומעבר לכד האחר. הסתכלו על שרשרת מרקוב שמצביה הם מספר הכדורים הלבנים בכד הראשון.
(א) רשמו את מטריצת המעבר של השרשרת.
(ב) מיינו את מצבי השרשרת.
(ג) עבור $N=3$, חשבו את וקטור ההסתברויות הסטציונרי.

7. בקזינו ישנם 2 משחקים, A ו B .
במשחק A , זורקים מטבע מוטה שנופל על עץ בסיכוי 0.75. אם יצא עץ – מפסידים 1, ואם יצא פלי, מרוויחים 1.
במשחק B , אם יש למהמר סכום כסף זוגי בחשבון, מרוויחים 5 בסיכוי 0.5, ומפסידים 1 בסיכוי 0.5. אם למהמר סכום כסף אי-זוגי בחשבון, מרוויחים 2 בסיכוי 0.5 ומפסידים 6 בסיכוי 0.5.

לא ניתן כמובן להסתיר כסף.
א. מה תוחלת הרווח האסימפטוטית למשחק אם המהמר משתמש תמיד במשחק A ?
ב. מה תוחלת הרווח האסימפטוטית למשחק אם המהמר משתמש תמיד במשחק B ?
ג. מה תוחלת הרווח האסימפטוטית למשחק אם המהמר משחק $ABABAB \dots$ (תוחלת רווח אסימפטוטית למשחק הכוונה ל גבול של הרווח מ n משחקים חלקי n כש n הולך לאינסוף)

1. נתון יוצר אינפיניטיסימלי $\Lambda = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 4 & -8 & 4 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ של שרשרת מרקוב בזמן רציף.

מצאו את הסתברויות המעבר של השרשרת הטמונה $p_{i,j}(t)$ עבור $i, j = 1, 2, 3$. מצאו גם את וקטור ההסתברויות הסטציונרי.

2. נתונה שרשרת מרקוב בזמן רציף עם יוצר אינפיטיסימלי

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- תארו את השרשרת הבדידה הטמונה בשרשרת הרציפה
- מצאו את ההתפלגות הסטציונרית
- תארו את השרשרת הרציפה בתור שרשרת אחידה מעל שרשרת בזמן בדיד.

3. * תור הוא תהליך בזמן רציף $\{Q_t\}$ שמקבל ערכים טבעיים (מספר האנשים הממכים בתור) התור נבנה בעזרת שני תהליכי ספירה, - תהליך ההגעות $\{A_t\}$ - (arrival process) - המתאר את הזמנים שבהם מגיעים אנשים לתור, ותהליך שירות $\{S_t\}$ - (service process), המתאר את הזמנים בהם איש מהתור יכול לקבל שירות (אם התור לא ריק).
(כלומר $A_t = \{\text{arrivals up to time } t\}$ $S_t = \{\text{services up to time } t\}$)
כאשר מגיע איש לתור - מספר האנשים בתור גדל ב 1. כאשר יש שירות, אם התור לא ריק, מספר האנשים בתור יורד ב 1 (כלומר "שירות" לא נשמר לזמן מאוחר יותר). אם יש הגעה ושירות באותו זמן, האדם משורת מיידית. התהליך שסופר את מספר האנשים ששורתו עד זמן t נקרא תהליך העזיבה (departure process) ויסומן ב $\{D_t\}$
נניח כעת כי תהליך ההגעות A_t הוא תהליך פואסון עם קצב λ , ותהליך השירות הוא תהליך פואסון עם קצב 1. כמו כן נניח כי בתחילה התור ריק, כלומר $Q_0 = 0$.
- מה ההסתברות שיש זמן שבו מתרחשת הן הגעה והן שירות?
 - האם $\{Q_t\}$ שרשרת מרקוב?
 - מהי השרשרת הבדידה הטמונה בתהליך Q_t ?
 - האם אפשר לתאר את השרשרת בתור שרשרת אחידה? (מותר להרשות לשרשרת הבדידה להשאיר באותו מצב אם יש צורך)
 - עבור אילו ערכים של λ השרשרת חולפת? עבור אילו היא נשנית חיובית רמז - דרך אחת היא להסתכל על השרשרת הטמונה.
 - הוכיחו כי במקרה בו השרשרת נשנית חיובית, ההתפלגות הסטציונרית היא $\text{Geo}(\lambda)$.
 - האם $\{Q_t\}$ רברסבילית? האם השרשרת הטמונה רברסבילית?

(עוד לא דיברנו על רברסביליות וסטציונריות בשרשראות רציפות, אך נדבר על כך שבוע הבא. מי שרותה שיענה על סעיפים אלו לגבי השרשרת הטמונה)